



Digitized by the Internet Archive
in 2026

Bestimmung des Klimas eines einfachen
Zirkulationsmodells

Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung des Doktorgrades
des
Fachbereichs Physik
der Ludwig-Maximilians Universität
zu München



vorgelegt
von
Werner Metz
aus München

Januar 1976

1. Berichterstatter: Prof. Dr. J. Egger

2. Berichterstatter: Prof. Dr. G. Hofmann

Tag der mündlichen Prüfung: 3.6.1976



DISSERTATIONS- UND FOTODRUCK FRANK oHG
8 München 2, Gabelsbergerstraße 15, Tel. 2 8 0 9 0 9 0

Inhalt

Zusammenfassung	I
Verzeichnis der verwendeten Symbole	II
Definitionen	IV
O. Einleitung	1
1. Klima und Klimaänderungen von Modellatmosphären	8
1.1. Inneres und Äußeres System	8
1.2. Klima und mittlerer Zustand	10
1.3. Stationäre Klimate	11
1.4. Berechnung von stationären Zuständen mit einem zeitunabhängigen statistisch- dynamischen Modell	13
1.5. Quasistationäre Klimaänderungen	15
2. Das Zirkulationsmodell	17
2.1. Vertikale Diskretisierung der quasi- geostrophischen Grundgleichungen	18
2.2. Parameterisierung von turbulenter Schub- spannung und diabatischer Wärmequelle	20
2.3. Horizontale Diskretisierung	21
2.4. Die spektralen Gleichungen des Zirku- lationsmodells	23
2.5. Inneres und Äußeres System	26
3. Zirkulationsformen	27
3.1. Die stationäre Hadleyzirkulation (HZ)	27
3.2. Die Stabilität der HZ	28
3.3. Zirkulationsformen mit x-abhängigen Wellen	31
3.4. Zusammenfassung	39
4. Bestimmung von stationären Klimaten mit Monte- Carlo-Vorhersagen	41
4.1. Ausführung der Monte-Carlo-Vorhersagen	41
4.2. Diskussion der Monte-Carlo-Vorhersage für $Ro_T = 0.017$	43

4.3. Diskussion des stationären Klimas	45
4.4. Abhängigkeit der stationären Statistiken von der Ensemblegröße	49
4.5. Stationäre Klimate für $Ro_T = 0.015$, 0.016 und 0.018	52
4.6. Zusammenfassung der Ergebnisse	54
5. Klimauntersuchungen mit dem stationären SD-Modell	55
5.1. Das stationäre SD-Modell	55
5.2. Die Berechnung stationärer Zustände	62
5.3. Die Simulation quasistationärer Klimaänderungen mit dem stationären SD-Modell	66
5.4. Zusammenfassung	70
6. Schlußbemerkung	71
Literaturverzeichnis	72
Anhang 1. Berechnung der Stabilitätsgrenzen der HZ	76
Anhang 2. Das zeitliche Differenzenschema	81
Anhang 3. Koeffizienten der algebraischen Darstellungen horizontaler Differentiationen	82
Lebenslauf	83

Zusammenfassung

Das Klima eines spektralen, quasigeostrophischen 2-Flächenmodells wird untersucht. Dieses Modell besitzt in Abhängigkeit von einer vorgeschriebenen Gleichgewichtstemperatur einfache Zirkulationsformen, wie Hadleyzirkulation, Rossbyzirkulation und Vacillation. Das Klima ist durch Ensemblemittel definiert, für die Approximationen mit Monte-Carlo-Vorhersagen berechnet werden können. Es werden Experimente durchgeführt mit a) zeitlich konstanter Gleichgewichtstemperatur und b) zeitlich veränderlicher Gleichgewichtstemperatur. Bei a) wird ein stationäres Klima definiert, wobei zur Klimabestimmung wegen der endlichen Ensemblegröße zusätzlich zu der Ensemblemittelung noch eine Zeitmittelung erforderlich ist. Bei b) werden solche Experimente betrachtet, bei denen die Änderung der Gleichgewichtstemperatur so langsam vor sich geht, daß das damit verbundene Klima durch eine Folge von stationären Klimaten ersetzt werden kann. Dies wird als quasistationäre Klimaänderung definiert.

Als mit geringerem Rechenaufwand verbundene Alternative zu den Monte-Carlo-Vorhersagen wird zur Klimauntersuchung ein spektrales, statistisch-dynamisches (SD) Modell verwendet, dessen Variable zeitunabhängige Ensemblemittel sind. Das SD-Modell ist aus dem spektralen 2-Flächenmodell abgeleitet und hat als Grundlage die Gleichungen für die ersten und zweiten Momente bezüglich der Ensemblemittelung. Der Gleichungssatz wird bei Anwendung auf die Rossbyzirkulation durch Vernachlässigung der dritten Momente, bei Anwendung auf die Vacillation durch Parameterisierung der dritten Momente geschlossen. Der Vergleich zwischen den mit dem SD-Modell berechneten Ensemblemitteln und den mit der Monte-Carlo-Vorhersage berechneten stationären Klimaten fällt befriedigend aus. Allerdings ist für die Lösung des SD-Modells die Kenntnis einer guten Approximation an das stationäre Klima erforderlich. Die Simulation der quasistationären Klimaänderung durch schrittweise Veränderung der Gleichgewichtstemperatur mit dem SD-Modell fällt zufriedenstellend aus.

Verzeichnis der verwendeten Symbole

α_1	Statistiken
$\tilde{\alpha}_1$	stationäre Statistiken
β	Rosbyparameter = $1.6 \cdot 10^{-11} \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-1}$
γ_{ijk}	Parameterisierungskoeffizienten der dritten Momente
δ_{ij}	Kroneckersymbol
Δt	Zeitinkrement
ϵ	Stromfunktion des thermischen Windes = $(\psi_1 - \psi_3)/2$
$\bar{\zeta}_g$	barotrope Vorticity = $\nabla^2 \psi$
$\hat{\zeta}_g$	thermische Vorticity = $\nabla^2 \epsilon$
ζ_4	Bodenvorticity (2.3b)
λ^2	Faktor in (2.4b)
μ	Ensembleindex
ν	Zeitindex $t = t_a + \nu \Delta t$
σ	hydrostatisches Stabilitätsmaß = $2.248 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2} \text{ cb}^{-2}$
σ_0	dimensionsloses Stabilitätsmaß (2.11)
τ	turbulente Schubspannung = (τ_x, τ_y)
ψ_1	geostrophische Stromfunktion im Niveau 250 mb
ψ_3	" " " " 750 mb
ψ	Stromfunktion des vertikal gemittelten Windes = $(\psi_1 + \psi_3)/2$
ω	generalisierte Vertikalgeschwindigkeit = $\frac{dp}{dt}$
a_i^2	Koeffizienten in (2.10a)
B	Parameter des äußeren Systems (2.11)
b_{ij}	Koeffizienten in (2.10b)
c_p	spezifische Wärme bei konstantem Druck = $1004 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2} \text{ K}^{-1}$
c_{ijk}	Koeffizienten in (2.10c)
f_o	Coriolisparameter = 10^{-4} s^{-1}
g	Erdbeschleunigung = 9.81 m s^{-2}
h	Erwärmungskoeffizient (2.3d)
H	Parameter des äußeren Systems (2.11)
k	Bodenreibungskoeffizient (2.3a)
K	Parameter des äußeren Systems (2.11)
k_i	Koeffizient der inneren Reibung (2.3c)
K_i	Parameter des äußeren Systems (2.11)

L	Skalierungsgröße $\pi L = 10000 \text{ Km}$
P_2	= 500 mb
$\dot{Q}$	diabatische Wärmequelle
R	Gaskonstante für trockene Luft = $286.8 \text{ m}^2 \text{s}^{-2} \text{K}^{-1}$
Ro_T^*	aufgeprägte thermische Rossbyzahl (2.13)
T_2	Temperatur im 500 mb - Niveau
T_2^*	aufgeprägte Gleichgewichtstemperatur
$\frac{\underline{v}}{\underline{v}_g}$	vertikal gemittelter Wind = $\underline{k} \times \underline{\nabla} \psi$
$\frac{\underline{v}}{\underline{v}_g}$	thermischer Wind = $\underline{k} \times \underline{\nabla} \varepsilon$
$\underline{X}$	Zustandspunkt im inneren Phasenraum = $(X_1, X_2, \dots, X_N)$
$\underline{\nabla}$	$= (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})_p$
∇^2	$= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$

$$J(a,b) = \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial a}{\partial y} \frac{\partial b}{\partial x}$$

A_μ Wert der Größe A auf dem μ -ten Ensemblepunkt

$\langle A \rangle$ Ensemblemittel der Größe A (1.2)

$$A' = A - \langle A \rangle$$

$$\bar{A} \quad \text{Zeitmittel} = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} A \, dt$$

$$A^* = A - \bar{A}$$

$\tilde{A}$ diskretes Zeitmittel (1.3a)

Definitionen

	Definiert auf Seite:
Außeres System	9
Deterministische Vorhersage	9
Ensemble der Größe M	10
Innerer Phasenraum	9
Inneres System	9
Klima	10
Klimaänderung	15
Klimaensemble	10
Mittlerer Zustand des inneren Systems	11
Momentaner Zustand des inneren Systems	9
Quasistationäre Klimaänderung	16
Stationäres Klima	12
Stationäre Statistiken	12
Stationärer Zustand	14
Statistiken	11

0. Einleitung

Eine der vielversprechendsten Methoden der Klimaforschung ist die Erstellung von numerischen Modellen (zur Definition vergl.: GARP 1975, S. 19). Dabei muß jedoch eine Entscheidung darüber getroffen werden, was unter 'Klima' verstanden werden soll. LANDSBERG (1958) versteht unter Klima den mittleren Zustand der Atmosphäre an einem bestimmten Punkt der Erde für einen bestimmten Zeitraum. LORENZ (1964) spezifiziert diesen mittleren Zustand dahingehend, daß es sich dabei um die 'langfristigen statistischen Eigenschaften der Atmosphäre' handelt, im Gegensatz zu den kurzfristigen Erscheinungen, die als 'Wetter' bezeichnet werden. Damit fordert er die Unterteilung des in der Atmosphäre beobachteten Frequenzspektrums durch die Festlegung einer Trennungszeitperiode t^* (vergl. auch: SCHNEIDER und DICKINSON 1974). Als Richtschnur für t^* wird auf der Konferenz 'The Physical Basis of Climate and Climate Modelling' in Stockholm (GARP 1975) gefordert, daß t^* größer sein soll, als die durchschnittliche Lebensdauer einer Zyklone. Die Definition von LORENZ wird dort dahingehend erweitert, daß nicht nur die Atmosphäre selbst, sondern das kombinierte System Atmosphäre-Ozeane-Kryosphäre-Landoberfläche-Biomasse betrachtet wird. Gleichzeitig werden die das kombinierte System beeinflussenden äußeren Zwangsprozesse (z.B. Solarstrahlung) in die Klimadefinition mit einbezogen. Das Klima wird dann definiert durch die statistischen Eigenschaften einer beobachteten 'Klimazeitreihe', wobei Schätzwerte für diese statistischen Eigenschaften (Klimastatistiken) durch Mittel über Stichproben (endliche Zeitintervalle) berechnet werden können.

Ausgehend von der Definition der Klimastatistiken als endliche Zeitmittel können zwei verschiedene Wege zur Erforschung des Klimas mit numerischen Modellen eingeschlagen werden. Der eine führt über die explizite Vorhersage der Lebensgeschichte der sich rasch ($<t^*$) ändernden, großräumigen atmosphärischen Gebilde (Elemente der 'Makroturbulenz') über einen langen ($>>t^*$) Zeitraum. Zu diesem Zweck wurde eine besondere Gruppe von numerischen Modellen

entwickelt, die Modelle zur Simulation der Allgemeinen Atmosphärischen Zirkulation (AAZ), kurz Zirkulationsmodelle genannt. Als Beispiel seien hier die Modelle von MINTZ (1965), SMAGORINSKY und Mitarbeitern (1965) sowie KASAHARA und WASHINGTON (1967) aufgeführt. Charakteristisch für diese prognostischen Modelle ist die Berücksichtigung der äußeren Zwangsprozesse und das Bestreben, so viele wie möglich der für das Verhalten der Atmosphäre verantwortlichen physikalischen Prozesse explizit zu erfassen (hohe räumliche Auflösung). Durch numerische Integration über die Zeit werden Zeitreihen der Modellvariablen berechnet. Die Klimastatistiken - einfache Mittelwerte, Varianzen, Kovarianzen und evtl. höhere Korrelationen - werden durch Mittelungen über endliche Zeitintervalle (Δt) dieser Zeitreihen bestimmt. Die hier angedeutete Methode wird mit WILLSON (1973) als explizit-dynamische (ED) Methode bezeichnet. Wegen der komplexen Natur der AAZ-Modelle ist die ED-Methode mit einem enormen Rechenaufwand verbunden.

Da die ED-Methode allgemein als zu rechenaufwendig betrachtet wird, wird schon frühzeitig ein anderer Weg zur Erforschung des Klimas mit numerischen Modellen eingeschlagen. Dies ist der Versuch, die Klimastatistiken selbst zu Variablen eines Modells zu machen und auf diese Weise die ausführliche Behandlung der makroturbulenten Elemente zu vermeiden. Diese Methode wird als statistisch-dynamische (SD) Methode bezeichnet. Ein SD-Modell entsteht im Prinzip durch die Anwendung eines Zeitmittelungsoperators auf die Gleichungen eines Zirkulationsmodells. Wegen der nichtlinearen Natur dieser Gleichungen treten in den gemittelten Gleichungen nicht nur die einfachen Mittelwerte (erste Momente) selbst, sondern auch Varianzen und Kovarianzen (zweite Momente) auf. Das Modell enthält somit mehr Unbekannte als Gleichungen, es ist nicht geschlossen. Um die Schließung zu vollziehen, muß eine Beziehung zwischen den ersten Momenten und den zweiten Momenten hergestellt werden (Parameterisierung der zweiten Momente), die auf Vorstellungen von den Eigenschaften der Makroturbulenz beruht. Dieses Verfahren wird Schließung auf der 1. Stufe genannt.

Die Anwendung eines Mittelungsoperators auf die Gleichungen eines der erwähnten AAZ-Modelle würde eine Unzahl von physikalisch nur sehr schwer zu interpretierenden zweiten Momenten hervorrufen, für welche eine Parameterisierung gefunden werden müßte. Da dies mit Hilfe beobachteter Daten kaum zu bewerkstelligen ist, beziehen sich die meisten der existierenden SD-Modelle nicht auf ein Zirkulationsmodell, sondern sind von vornherein als sogenannte 'zonalgemittelte' Modelle (vergl.: SCHNEIDER und DICKINSON 1974) konzipiert. Die hier zu parameterisierenden zweiten Momente sind im wesentlichen die makroturbulenten Transporte von Impuls und Temperatur durch eine Breitenzone. Hier sind die Modelle von SELA und WIIN-NIELSEN (1970), DOLZHANSKIY (1969), WILLIAMS und DAVIES (1965) sowie SALTZMAN und VERNEKAR (1971) zu nennen. Eine Übersicht der jeweils verwendeten Schließungsmethoden gibt WILLSON (1973). Die ersten beiden Modelle sind zeitabhängig und werden bis zu einem 'Gleichgewichtszustand' integriert, so daß eine nachträgliche Zeitmittelung zur Berechnung der Klimastatistiken entfällt. Die beiden letzteren sind stationäre Modelle, hier sind die Variablen bereits als Zonal- und Zeitmittel definiert. Die damit verbundene Vernachlässigung der Tendenzen der mittleren Größen sind, wie Beobachtungen (z.B. NEWTON 1971) zeigen, schon für Jahresmittel gut zu rechtfertigen. Gemeinsam ist all diesen Modellen, daß sie linear sind und die berechneten Lösungen in starkem Maß durch die Art der jeweils verwendeten Parameterisierung erzwungen werden.

Um die als wesentlich betrachtete Nichtlinearität der für das Verhalten der Atmosphäre verantwortlichen physikalischen Prozesse auch in einem SD-Modell besser repräsentieren zu können, wurde eine weitere Gruppe von zonalgemittelten Modellen entwickelt. Dies sind die derzeit komplexesten SD-Modelle, nämlich die mit Schließung auf der 2. Stufe. Darunter ist zu verstehen, daß zusätzlich zu den prognostischen Gleichungen für die ersten Momente auch noch die prognostischen Gleichungen für die zweiten Momente mitgeführt werden. Damit müssen die dritten Momente parameterisiert werden.

Hier sind die Modelle von KURIHARA (1970) und EGGER (1975) zu nennen. KURIHARAs Modell ist prognostisch, die Schließung wird durch Vernachlässigung aller dritten Momente vollzogen, bis auf den makroturbulenten Transport von turbulenter kinetischer Energie durch eine Breitenzone, für welchen eine Parameterisierung angegeben wird. Die Klimastatistiken werden durch eine nachträgliche 30-Tage-Mittelung berechnet. EGGERs Modell ist stationär und ist durch die Annahme geschlossen, daß alle Variablen Zufallsfunktionen sind, die einer Normalverteilung gehorchen. Beide Modelle weisen eine gute Übereinstimmung mit Beobachtungen auf.

In der vorliegenden Arbeit wird der Versuch unternommen, ein nicht zonalgemitteltes stationäres SD-Modell aufzustellen, das auf der 2. Stufe geschlossen ist und auf einem Zirkulationsmodell basiert. Nicht zonalgemittelte stationäre SD-Modelle mit Schließung auf der 2. Stufe liegen von KIM (1973) und HOINKA (1975) vor. Die Untersuchungen dieser Autoren sind speziell auf das Studium des Einflusses der Orographie auf 'plantarische Zirkulationssysteme' hinausgerichtet.

Wie LEITH (1975) betont, darf ein Zirkulationsmodell, das die Grundlage eines SD-Modelles bilden soll, nur einen, im Vergleich zu den AAZ-Modellen, kleinen Ausschnitt aus der gesamten Maßstabsskala der atmosphärischen Bewegungen explizit behandeln. Dies kann am einfachsten bei Verwendung der Spektralmethode geschehen, wo nur ganz bestimmte Wellenlängen explizit vorgeschrieben sind. Zirkulationsmodelle, welche die Spektralmethode verwenden, haben ROBERT (1966) und SCHMIDT (1971) vorgestellt. Für die Entwicklung eines SD-Modelles sind diese jedoch zu kompliziert, weshalb auf ein, dem Modell von LORENZ (1963b) ähnliches, quasigeostrophisches, spektrales 2-Flächenmodell zurückgegriffen wird.

In Abweichung von den eingangs gegebenen Klimadefinitionen wird ein Vorschlag aufgegriffen, den LEITH (1975) auf der Stockholmer Konferenz vorgetragen hat. Danach soll eine Unterscheidung vorgenommen werden zwischen einem 'inneren System', das durch rela-

tiv rasche Schwankungen gekennzeichnet ist (z.B. Atmosphäre, obere Schichten des Ozeans) und einem 'äußeren System', welches die sich relativ langsam ändernden äußeren Einflüsse auf das innere System umfaßt (z.B. Solarstrahlung, oder auch tiefere Schichten des Ozeans). Die Klimastatistiken definiert LEITH dann durch Mittel über ein hypothetisches Ensemble von Zuständen des inneren Systems, welches sich mit den langsam schwankenden äußeren Einflüssen 'im Gleichgewicht' befinden soll.

Ogleich nicht entschieden werden kann, ob diese Definition, angewandt auf die Atmosphäre, sinnvoll ist, ist sie bei einer Anwendung auf ein Zirkulationsmodell durchaus realisierbar. Das innere System kann dann durch alle Größen definiert werden, die im Modell berechnet werden, während das äußere System durch die im Modell vorgeschriebenen Größen festgelegt werden kann. Mit dem oben erwähnten spektralen Zirkulationsmodell kann bei Verwendung der Monte-Carlo-Methode (vergl.: EPSTEIN 1969) eine zeitliche Folge endlicher Ensembles von Zuständen des inneren Systems berechnet werden. Der Vorteil dieses Verfahrens gegenüber der eingangs erwähnten ED-Methode liegt im Prinzip darin, daß bei Verwendung eines sehr großen Ensembles (das von LEITH postulierte Ensemble ist unendlich groß) zur Berechnung der Klimastatistiken nur Mittelungen über das Ensemble, nicht aber Zeitmittelungen erforderlich wären. Dies würde bedeuten, daß Klimaänderungen immer berechnet werden könnten, unabhängig davon, in welchem Zeitmaßstab sie erfolgen.

Wie bereits angedeutet, sind die eben gemachten Ausführungen jedoch mehr hypothetischer Natur. In der Praxis können derartige Versuche selbst mit einem sehr stark vereinfachten Zirkulationsmodell wegen der immensen Rechenkosten nicht durchgeführt werden. Zur Klimabestimmung wird deshalb in dieser Arbeit das bereits erwähnte spektrale stationäre SD-Modell herangezogen, dessen Variablen als Ensemblemittel definiert sind. Dem Modell liegen die, aus den Gleichungen des spektralen Zirkulationsmodells abgeleiteten, Momentengleichungen für die ersten und zweiten Momente (bezüglich der Ensemblemittelung) zugrunde. Die Tendenzen der Momente sind dabei vernachlässigt. Die Gleichungen des Modells werden bei gegebenem Zustand des äußeren Systems gelöst.

Wie Lorenz (1963b) zeigt, besitzen spektrale, quasigeostrophische, vereinfachte Zirkulationsmodelle eine Reihe typischer Zirkulationsformen, die nur ein sehr stark vereinfachtes Bild der AAZ geben. Es erscheint daher nicht angebracht, die Lösung des aus dem spektralen Zirkulationsmodell abgeleiteten SD-Modelles mit an der Atmosphäre beobachteten Größen (z.B. Jahresmitteln) zu vergleichen. Zur Verifizierung des SD-Modelles werden Monte-Carlo-Vorhersagen mit Hilfe des spektralen 2-Flächenmodells von realisierbarer Ensemblegröße herangezogen, wobei allerdings dem mehr oder weniger starken Rauschen der Ensemblemittel Rechnung getragen werden muß. In Kapitel 1 wird daher ein Vorschlag angegeben, wie bei Monte-Carlo-Vorhersagen, die bei zeitlich konstantem Zustand des äußeren Systems durchgeführt werden, durch Ensemble- und Zeitmittelung Klimastatistiken berechnet werden können. Diese sogenannten 'stationären Statistiken' werden zur Verifizierung der mit dem SD-Modell für denselben Zustand des äußeren Systems berechneten Lösung herangezogen.

Als wichtige Anwendungsmöglichkeit eines stationären SD-Modelles wird gemeinhin die Erforschung der Antwort des Klimas auf eine Änderung im äußeren System betrachtet (Klimaänderung). So untersucht z. B. Egger (1975) den Einfluß verschiedener Werte des Schubspannungskoeffizienten c_D und HOINKA (1975) den Einfluß verschiedener orographischer Strukturen. Nahezu nichts ist jedoch darüber bekannt, ob die Reaktion der Atmosphäre auf Änderung der äußeren Einflüsse, welche zu einer Klimaänderung führt, in der Realität so vor sich geht, daß der Einsatz von stationären Modellen erlaubt ist. Mit Hilfe einer Monte-Carlo-Vorhersage, die bei zeitlich veränderlichem äußeren System ausgeführt wird, wird ein Kriterium dafür angegeben (s. Kapitel 1), wann die bei diesem Versuch beobachtete Klimaänderung durch eine Folge von stationären Statistiken beschrieben werden kann. Solche sogenannten 'quasistationären Klimaänderungen' können mit dem stationären spektralen SD-Modell durch schrittweise Veränderung des äußeren Systems berechnet werden.

Eine ausführliche Erörterung der gesamten, bisher angesprochenen Problematik, zusammen mit den notwendigen Definitionen gibt Kapitel 1. In Kapitel 2 wird das spektrale Zirkulationsmodell vorgestellt, dessen Zirkulationsformen in Abhängigkeit vom äußeren System in Kapitel 3 untersucht werden. Kapitel 4 bringt die Berechnung von stationären Statistiken mit Hilfe von Monte-Carlo-Vorhersagen für verschiedene Zustände des äußeren Systems. In Kapitel 5 schließlich wird das stationäre SD-Modell vorgestellt, für verschiedene Zustände des äußeren Systems gelöst und die Simulation einer quasistationären Klimaänderung vorgenommen.

1. Klima und Klimaänderungen von Modellatmosphären

Unter Modellatmosphären soll eine Approximation an das physikalische System Atmosphäre (vergl. Einleitung) verstanden werden, deren Verhalten mit einem Zirkulationsmodell berechnet wird. Für die Modellatmosphäre werden die Begriffe 'Klima' und 'Klimaänderung' eingeführt. Sodann wird aufgezeigt, wie Approximationen an ein zeitunabhängiges Klima mit Hilfe einer statistischen Vorhersage nach der Monte-Carlo-Methode berechnet werden können. Ferner wird auf der Grundlage des die Modellatmosphäre definierenden Zirkulationsmodells ein zeitunabhängiges SD-Modell aufgestellt, mit dem sich ebenfalls Approximationen an ein zeitunabhängiges Klima berechnen lassen. Schließlich wird eine Methode angegeben, wie mit diesem SD-Modell auch Klimaänderungen bei einem zeitabhängigen Klima berechnet werden können.

1.1. Inneres und äußeres System

Bevor der Begriff 'Klima' definiert werden kann, ist es notwendig, eine klare Unterscheidung zwischen der Modellatmosphäre selbst und den ihr zeitliches Verhalten beeinflussenden äußeren Zwangsfunktionen (vergl. Einleitung) zu treffen. Es werden hier nur solche Modellatmosphären betrachtet, die durch quasigeostrophische 2-Flächenmodelle definiert sind. Unter Verwendung der Spektralmethode (vergl. hierzu Kapitel 2) bilden die Gleichungen solcher Modelle ein System von gewöhnlichen, nichtlinearen DGLen folgenden Typs (vergl. LORENZ 1963a):

$$(1.1) \quad \frac{d}{dt} X_i = \sum_{j,k} a_{ijk} X_j X_k - \sum_j b_{ij} X_j + c_i; \quad i, j, k = 1, 2, \dots, N$$

Die Variablen $X_i = X_i(c)$ in (1.1) sind die spektralen Entwicklungskoeffizienten der beiden meteorologischen Variablen des 2-Flächenmodells. Die Doppelsumme auf der rechten Seite von (1.1) stellt die von den Advektionstermen des 2-Flächenmodells herrührenden nichtlinearen Wechselwirkungen dar, wobei der Einfluß räumlicher Differentiationen in den Wechselwirkungskoeffizienten a_{ijk} gespeichert ist. Hierbei gilt:

$$\sum_{i,j,k=1}^N a_{ijk} X_i X_j X_k = 0.$$

(Energieerhaltung in einem quellen- und senkenfreien Medium). Die zweite Summe beinhaltet die dissipativen Terme, sowie den Einfluß der Breitenvariation des Coriolisparameters. Die Koeffizienten c_i stellen schließlich die Zwangsfunktionen des Modells dar. Die Gesamtzahl N der Variablen X_i ist von der Auflösung (Anzahl der bei der Spektralmethode verwendeten Orthogonalfunktionen) der beiden meteorologischen Variablen im Integrationsgebiet bestimmt. N wird als die Anzahl der Freiheitsgrade des Modells bezeichnet.

Nach einem Vorschlag von LEITH (1975) wird nun ein inneres System durch die vom Modell berechneten Variablen X_i definiert, welches fortan den Begriff Modellatmosphäre ersetzen soll. Zur Festlegung der äußeren Einflüsse wird nun noch ein äußeres System durch alle im Modell vorgeschriebenen 'Variablen' eingeführt. In einem 2-Flächenmodell sind dies neben den Zwangsfunktionen, wie z.B. der Strahlungsgleichgewichtstemperatur, im wesentlichen das hydrostatische Stabilitätsmaß, sowie die Parametrisierungskoeffizienten der subskaligen turbulenten Transporte. In der Gleichung (1.1) sind diese Größen in den Koeffizienten c_i , b_{ij} und a_{ijk} verborgen. Eine explizite Festlegung des äußeren Systems kann jedoch bei jedem speziellen Modell vorgenommen werden (siehe hierzu Kapitel 2).

Der momentane Zustand des inneren Systems zu einem bestimmten Zeitpunkt $t = t_a$ wird durch den Endpunkt des Vektors $\underline{X}(t_a)$, $\underline{X}(t_a) = (X_1(t_a), \dots, X_N(t_a))$ in einem N -dimensionalen Euklidischen Vektorraum (Phasenraum) definiert (vergl. LORENZ 1963a, EPSTEIN 1969). Dieser Vektorraum wird innerer Phasenraum genannt. Ebenso läßt sich der Zustand des äußeren Systems in einem äußeren Phasenraum definieren. Durch numerische Integration von (1.1), wobei die Zeitkoordinate diskretisiert werden muß, erhält man eine Punktfolge im inneren Phasenraum, welche Zeitreihe genannt wird. Der Zustand des äußeren Systems ist dabei entweder konstant oder als Funktion der Zeit vorgeschrieben. Da gleiche Anfangszustände für die numerische Integration bei gleichem Verhalten des äußeren Systems immer zu gleichen Zeitreihen führen, wird dieses Verfahren deterministische Vorhersage genannt.

1.2. Klima und mittlerer Zustand

Betrachtet man die Zeitreihen zweier deterministischer Vorhersagen, bei gleichem äußeren System, jedoch mit unterschiedlichen Anfangsbedingungen an einem festen Zeitpunkt $t = t_1$, so werden sich die beiden Zustände des inneren Systems voneinander unterscheiden. Man stelle sich nun vor, daß auf diese Weise unendlich viele deterministische Vorhersagen durchgeführt werden könnten. Dann bildet die Gesamtheit aller so erhaltenen Zustände des inneren Systems zum Zeitpunkt t_1 das Klimaensemble des inneren Systems bei gegebenem äußeren System. Die Existenz dieses Klimaensembles wird postuliert.

Das Klima des inneren Systems bei gegebenem äußeren System zum Zeitpunkt t_1 wird durch die statistischen Eigenschaften (Klimastatistiken) des Klimaensembles, z.B. durch die Momente der dem Klimaensemble zugeordneten Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Variablen X_1 definiert. Das Klima ist somit eine diskrete Funktion der Zeit.

Da ein Experiment der eben beschriebenen Art nicht durchgeführt werden kann, kann man lediglich Approximationen an die Klimastatistiken aus einer endlichen Stichprobe des Klimaensembles berechnen. Diese endliche Stichprobe wird Ensemble von M Zustandspunkten oder Ensemble der Größe M genannt. Die Berechnung der Approximationen wird am Beispiel einer statistischen Vorhersage nach der Monte-Carlo-Methode vorgeführt (vergl. Kapitel 4, EPSTEIN 1969). Die Stichprobe wird hierbei zum Anfangszeitpunkt der Integration durch einen Zufallsprozeß bestimmt. Jeder Punkt des so bestimmten Ensembles ist die Anfangsbedingung (Zeitpunkt t_a) für eine deterministische Vorhersage. Bei M Punkten werden also M Zeitreihen berechnet. Nun wird ein Ensemblemittelungsoperator definiert:

$$(1.2) \quad \langle f(\underline{X}^{(v)}) \rangle = \frac{1}{M} \sum_{\mu=1}^M f(\underline{X}_{\mu}^{(v)})$$

Hier sind v die diskretisierte Zeitkoordinate ($t = t_a + v\Delta t$), f eine beliebige Funktion der Komponenten des Vektors $\underline{X}^{(v)}$, $\underline{X}_{\mu}^{(v)}$

der μ -te von insgesamt M Ensemblepunkten. Durch die mit (1.2) berechneten Momente des Ensembles, die als Statistiken $\alpha_1^{(v)}$ ¹⁾ bezeichnet werden, wird ein mittlerer Zustand des inneren Systems definiert. Die so berechneten Statistiken sind eine Funktion der Ensemblegröße M und gegenüber den Klimastatistiken mit einem Stichprobenfehler behaftet.

1.3. Stationäre Klimate

Unter Vorwegnahme der Ergebnisse von Kapitel 4 sei erwähnt, daß bei den zeitlichen Änderungen der mit der Monte-Carlo-Methode berechneten Statistiken Zeitskalen auftreten, die kleiner sind als die üblicherweise (siehe Schneider u. Dickinson 1974) noch dem Klima zugerechnete kleinste Zeitskala von ca. einem Monat. Diese kurzfristigen Schwankungen der Statistiken werden als Rauschen bezeichnet. Da sich gezeigt hat, daß bei einer Vergrößerung des Ensembles die Rauschamplitude absinkt, kann vermutet werden, daß bei sehr großem M die Rauschamplitude unter einen vorgegebenen sehr kleinen Wert gedrückt werden kann. Hat man auf diese Weise das Rauschen eliminiert, so könnte man durch die bei einer solchen Monte-Carlo-Vorhersage (d.h. $O(M) = 1000$) berechneten Statistiken zu jedem Zeitpunkt der Vorhersage das Klima definieren. Die zeitliche Änderung der Statistiken wäre als Klimaänderung zu interpretieren. Da jedoch die Rechenkosten einer Monte-Carlo-Vorhersage proportional zu M steigen, ist diese Methode kein realisierbarer Weg. Das Rauschproblem muß auf eine andere Weise gelöst werden.

Es werden nur diejenigen der in 1.2. beschriebenen Monte-Carlo-Vorhersagen betrachtet, die bei festem (zeitlich konstantem) äußeren System durchgeführt werden. Die in einem solchen Versuch berechneten Statistiken $\alpha_1 = \alpha_1^{(v)}$ werden nun noch einer Zeitmitteilung unterworfen:

$$(1.3a) \quad \tilde{\alpha}_1 = \frac{1}{v_2 - v_1} \sum_{v_1}^{v_2} \alpha_1^{(v)}; \quad 1 = 1, 2, \dots, L.$$

1) Hiervon kann nur eine endliche Anzahl, z.B. L berücksichtigt werden.

Für die Auswahl des Mittelungsintervalls (v_1, v_2) , für das eine Approximation an das Klima bestimmt werden soll, können keine verbindlichen Richtlinien angegeben werden. Sie bleibt der Erfahrung des Experimentators überlassen. Dasselbe Problem tritt übrigens auch bei der ED-Methode (vergl. Einleitung) auf, wo die Auswahl einer geeigneten Stichprobe aus der berechneten Zeitreihe ebenfalls weitgehend im Ermessen des Experimentators liegt.

Nun werden die Reihen $\alpha_1^{(v)}$ für jeden Zeitpunkt innerhalb des Mittelungsintervalls (v_1, v_2) mit $\tilde{\alpha}_1 = \text{const.}$ verglichen. Wenn sich L sinnvolle Schranken s_1 angeben lassen, so daß gilt

$$(1.3b) \quad |\tilde{\alpha}_1 - \alpha_1^{(v)}| < s_1 \text{ für } v_1 \leq v \leq v_2 \text{ und } l = 1, 2, \dots, L$$

dann definieren die Mittel $\tilde{\alpha}_1$, die nun stationäre Statistiken genannt werden, eine Approximation an das Klima, die ein stationäres Klima genannt wird.

Eine Schwierigkeit bei dieser Definition besteht in dem Begriff 'sinnvolle Schranken'. Die in (1.3b) anzuwendenden Schranken s_1 sollten eigentlich schon vor dem Experiment bekannt sein. Da aber das Rauschen der Statistiken $\alpha_1^{(v)}$ und damit auch die anzuwendenden Schranken s_1 eine Funktion der Ensemblegröße M sind, ist eine exakte Festlegung der Schranken s_1 vor einem Experiment nicht möglich. Es kann lediglich die Forderung erhoben werden, daß s_1 kleiner sein soll als die Rauschamplitude des entsprechenden Momentes, berechnet aus einer einzigen deterministischen Vorhersage (Ensemblegröße 1). Nach der Berechnung des Zeitverlaufs der $\alpha_1^{(v)}$ in (v_1, v_2) bei einem speziellen Experiment, läßt sich jedoch sofort entscheiden, wie groß die s_1 gewählt werden müssen (vergl. hierzu Abbildung 4-1). Die Tatsache, daß die Schranken s_1 nicht schon vor einem Experiment bestimmt werden können, wird jedoch in Kauf genommen. Mit der Definition (1.3b) wurde auch die Möglichkeit offengelassen, daß bei festem äußeren System kein stationäres Klima existiert.

Wie bei allen Klimadefinitionen (vergl. z.B. LANDSBERG 1958 oder

GARP 1975) kann auch hier nicht von dem stationären Klima bei gegebenem äußeren System gesprochen werden. Unterstellt man aber, daß bei gegebenem festen Zustand des äußeren Systems ein eindeutiges Klima (definiert durch die Momente des Klimaensembles) existiert, so können bei festem (v_1, v_2) durch Steigerung der Ensemblegröße M beliebig genaue Näherungen $\tilde{\alpha}_1(M)$ an das Klima berechnet werden. Dabei wird angenommen, daß für $M_2 > M_1$ $\tilde{\alpha}_1(M_2)$ eine bessere Approximation als $\tilde{\alpha}_1(M_1)$ ist. Bei gegebener Rechenkapazität sind dann die mit dem größtmöglichen M berechneten stationären Statistiken als beste Approximation an die Klimastatistiken aufzufassen.

Die Berechnung einer solchen besten Approximation ist immer noch sehr rechenkostenintensiv, so daß es angeraten erscheint nach anderen, billigeren Methoden zur Berechnung von Approximationen an die Klimastatistiken zu suchen. Hier muß insbesondere die in der Einleitung erwähnte SD-Methode in Betracht gezogen werden. Da zeitunabhängige Klimate zur Diskussion stehen, kommt nur ein stationäres oder Gleichgewichts-Modell in Frage, dessen Variable als Ensemblemittel definiert sind. Im nächsten Abschnitt wird die Konstruktion eines solchen zeitunabhängigen statistisch-dynamischen Modells mit Schließung auf der 2. Stufe diskutiert.

1.4. Berechnung von stationären Zuständen mit einem zeitunabhängigen statistisch-dynamischen Modell

Das Klima des inneren Systems ist nach Abschnitt 1.2. durch die Momente des Klimaensembles definiert. Unter Beibehaltung des Symbols ' $\langle \rangle$ ' für den auf das Klimaensemble bezogenen Mittelungsoperator werden für einen beliebigen Zeitpunkt t die aus den Variablen X_i abgeleiteten Momente eingeführt.

Hier werden betrachtet:

die ersten Momente $\langle X_i \rangle$, wobei gilt

$$(1.4a) \quad X_i = \langle X_i \rangle + X_i'$$

die zentralen zweiten Momente (Varianzen und Kovarianzen)

$$(1.4b) \quad \langle X_i' X_j' \rangle = \langle X_i X_j \rangle - \langle X_i \rangle \langle X_j \rangle$$

sowie die zentralen dritten Momente

$$(1.4c) \quad \langle X_i X_j X_k \rangle = \langle X_i X_j \rangle \langle X_k \rangle - \langle X_i \rangle \langle X_j \rangle \langle X_k \rangle - \langle X_i \rangle \langle X_j X_k \rangle - \langle X_j \rangle \langle X_i X_k \rangle - \langle X_k \rangle \langle X_i X_j \rangle,$$

$i, j, k = 1, 2, \dots, N.$

Ausgehend von (1.1) werden die Gleichungen für die ersten und zweiten Momente aufgestellt. Man erhält:

$$(1.5a) \quad \frac{d}{dt} \langle X_i \rangle = \sum_{j,k} a_{ijk} (\langle X_j \rangle \langle X_k \rangle + \langle X_j X_k \rangle) - \sum_j b_{ij} \langle X_j \rangle + c_i;$$

$$(1.5b) \quad \frac{d}{dt} \langle X_m X_n \rangle = \sum_{j,k} \{ a_{nj k} (\langle X_j \rangle \langle X_m X_k \rangle + \langle X_k \rangle \langle X_m X_j \rangle + \langle X_m X_j X_k \rangle) + a_{mj k} (\langle X_j \rangle \langle X_n X_k \rangle + \langle X_k \rangle \langle X_n X_j \rangle + \langle X_n X_j X_k \rangle) - \sum_j (b_{nj} \langle X_m X_j \rangle + b_{mj} \langle X_n X_j \rangle) \};$$

$n, m = 1, 2, \dots, N.$

Dieses Gleichungssystem enthält mehr Variable als Gleichungen. Es muß durch eine Parameterisierungsvorschrift für die in (1.5b) auftretenden dritten Momente geschlossen werden (Schließung auf der zweiten Stufe). Durch Nullsetzen der Zeitableitungen in (1.5a,b) entsteht ein nichtlineares Gleichungssystem dessen Unbekannte die ersten und zweiten Momente sind. Zusammen mit den Schließungsannahmen bildet es das stationäre SD-Modell. Da die Anzahl der Variablen des SD-Modells $N(N+3)/2$ beträgt, ist diese Methode auf innere Systeme beschränkt, die durch Zirkulationsmodelle mit wenigen ($O(N) = 10$) Freiheitsgraden definiert sind.

Gelingt die Lösung des Systems, so wird durch die Menge aller ersten und zweiten sowie der parameterisierten dritten Momente eine Approximation an das Klima bei festem äußeren System definiert, die als stationärer Zustand bezeichnet wird. Die Güte dieser Approximation hängt von der Qualität der benutzten Schließungsannahmen ab. Eine 'perfekte' Schließung wäre z.B. dann möglich, wenn die dem Klimaensemble zugeordnete Wahrscheinlichkeitsverteilung multivariat normal wäre. In diesem Fall bestünde die

Schließung im Nullsetzen der dritten Momente und die vom Modell berechneten Momente wären die Momente des unendlichen Klimaensembles. Im allgemeinen darf jedoch nicht erwartet werden, daß eine Normalverteilung vorliegt. In dieser Arbeit wird eine Schließung durch Parameterisierung der dritten Momente vorgenommen (vergl. Kapitel 5). Zur Verifizierung wird der mit dem Modell berechnete stationäre Zustand mit dem nach der Monte-Carlo-Methode berechneten stationären Klima verglichen.

1.5. Quasistationäre Klimaänderungen

Das in 1.2. definierte Klima ist eine Funktion der Zeit. Als Klimaänderung innerhalb eines Zeitraumes (v'_1, v'_2) bei gegebenem Verlauf des äußeren Systems wird die Differenz der Momente des Klimaensembles zum Zeitpunkt v'_2 von denen zum Zeitpunkt v'_1 definiert. Dabei ist nicht nur die Klimaänderung an sich, sondern auch der zeitliche Verlauf des Klimas selbst in (v'_1, v'_2) von Interesse. Es ist sinnvoll nur solche Klimaänderungen zu betrachten, die Folge eines zeitlich veränderlichen äußeren Systems sind.

Bei vorgegebener Änderung des äußeren Systems kann eine Klimaänderung durch eine statistische Vorhersage nach der Monte-Carlo-Methode approximiert werden, wobei wiederum der Stichprobenfehler zu berücksichtigen ist. Da man aber davon ausgehen muß, daß die Änderungen des äußeren Systems in einer Zeitskala vor sich gehen ¹⁾ die wesentlich größer ist als die in Abschnitt 1.3. verlangte Zeitspanne (v_1, v_2) , ist eine Approximation an eine Klimaänderung mit hoher Ensemblegröße (Elimination des Rauschens) wegen der enormen Rechenkosten sicherlich nicht durchführbar. Hier kommen nur Versuche mit niedriger Ensemblegröße in Frage, wobei allerdings der Stichprobenfehler sehr stark ins Gewicht fallen kann.

Es liegt nun der Gedanke nahe, eine Klimaänderung durch stationäre Klimate zu approximieren. Damit dies erfolversprechend geschehen kann, müssen jedoch bestimmte Anforderungen an den Ver-

1) Die charakteristische Zeitskala der tieferen Schichten des Ozeans sind Jahrhunderte. (GARP 1975)

lauf des Klimas im Intervall (v_1', v_2') gestellt werden. Zu jedem festen äußeren System kann mit der Monte-Carlo-Methode ein stationäres Klima als beste Approximation bestimmt werden. Damit erhält man bei gegebener Änderung des äußeren Systems die stationären Klimastatistiken als Funktionen der Zeit innerhalb (v_1', v_2') . Sie werden mit $\tilde{\alpha}_1^{(v)}$ bezeichnet. Führt man einen Monte-Carlo-Versuch mit kleiner Ensemblegröße mit derselben Änderung des äußeren Systems durch, so erhält man hieraus die Reihe der Statistiken $\alpha_1^{(v)}$. Die Klimaänderung innerhalb des Intervalles (v_1', v_2') wird quasi-stationär genannt, wenn sich L sinnvolle Schranken s_1' angeben lassen, so daß gilt:

$$(1.6) \quad |\tilde{\alpha}_1^{(v)} - \alpha_1^{(v)}| < s_1' \text{ für } v_1' \leq v \leq v_2' \text{ und } l = 1, 2, \dots, L.$$

Eine quasistationäre Klimaänderung kann nun definitionsgemäß durch die Differenz der stationären Statistiken, bestimmt für den Zustand des äußeren Systems zum Zeitpunkt v_2' von dem zum Zeitpunkt v_1' , berechnet werden.

Die Bestimmung der Abhängigkeit der stationären Statistiken vom äußeren System mit der Monte-Carlo-Methode ist sicherlich ebenfalls sehr kostspielig. Hier bietet sich eine Anwendungsmöglichkeit für das stationäre SD-Modell, nämlich die Ersetzung der stationären Statistiken in (1.6) durch mit dem SD-Modell berechnete Momente. Auf diese Weise können somit quasistationäre Klimaänderungen auch mit dem stationären SD-Modell berechnet werden.

2. Das Zirkulationsmodell

Die in dieser Arbeit betrachtete Modellatmosphäre wird durch ein quasigeostrophisches 2-Flächenmodell definiert. Als erster hat PHILLIPS (1956) nachgewiesen, daß ein solches Modell bei Verwendung der ED-Methode (vergl. Einleitung) in der Lage ist, die AAZ in guter Näherung zu simulieren. Da in der vorliegenden Arbeit aus dem Zirkulationsmodell ein SD-Modell abgeleitet werden soll, ist die Anzahl der Freiheitsgrade ¹⁾ des PHILLIPSSchen Modells hier viel zu groß. Nach dem Wissen des Autors existiert aber kein Zirkulationsmodell, das bei Verwendung der Gittermethode eine wesentlich niedrigere Gitterpunktzahl als das PHILLIPSSche aufweist. Eine Reduktion der Freiheitsgrade durch Verringerung der Gitterpunktzahl kommt also nicht in Frage.

Nun hat aber LORENZ (1962, 1963b) nachgewiesen, daß bei Verwendung der Spektralmethode die Anzahl der Freiheitsgrade auf ein Minimum ²⁾ reduziert werden kann, wobei das Modell ³⁾ noch in der Lage ist, barotrope und barokline Instabilitäten nachzuahmen. Die LORENZschen Versuche zielten jedoch nicht direkt auf die AAZ, sondern auf die als Dishpan-Experimente bezeichneten Laborversuche, welche von HIDE (1953), FULTZ (1959), u.a. zum Studium der AAZ durchgeführt wurden. Bei diesen Laborversuchen wird in Abhängigkeit von den Versuchsbedingungen das Auftreten einzelner dominierender Wellenzahlen beobachtet, sodaß die LORENZsche Beschränkung auf eine einzige Wellenzahl gerechtfertigt ist. In der Atmosphäre spielen jedoch ein-

1) PHILLIPS benutzt die Gittermethode, wobei die doppelte Gitterpunktzahl als Anzahl der Freiheitsgrade angesprochen werden kann.

2) Berücksichtigung einer einzigen Wellenzahl.

3) Das LORENZsche Modell ist ein quasigeostrophisches 2-Schichtenmodell, führt also im Unterschied zu 2-Flächenmodellen die statische Stabilität als Variable mit.

zelne Wellenzahlen nicht diese dominierende Rolle. Deshalb müßte ein im LORENZschen Sinne minimalisiertes Modell eigentlich den Einfluß der vom Modell nicht aufgelösten Wellenzahlen¹⁾ in parameterisierter Form enthalten. (vergl. hierzu: LEITH 1975). Da jedoch eine solche Parameterisierung nach dem Wissen des Autors nicht existiert, bleibt als Alternative nur die Vernachlässigung dieser Effekte. Eine unvermeidliche Konsequenz dieser Vereinfachung ist es daher, daß mit einem so minimalisierten Zirkulationsmodell sicherlich nicht die von PHILLIPS erzielte gute Übereinstimmung mit Beobachtungen erzielt werden kann.

Im Folgenden wird eine hinsichtlich der Freiheitsgrade minimale Version des PHILLIPSschen 2-Flächenmodells vorgestellt, wobei die Spektralmethode von LORENZ (1963b) verwendet wird. Die durch dieses Modell definierte Modellatmosphäre ist Gegenstand der Untersuchungen dieser Arbeit.

2.1. Vertikale Diskretisierung der quasigeostrophischen Grundgleichungen

Das Integrationsgebiet für die quasigeostrophische Vorticitygleichung und die quasigeostrophische thermodynamische Gleichung ist ein Kanal mit festen Seitenwänden im (x, y, p) -Raum. Die p -Koordinate ist durch die äquidistanten Gitterpunkte (Niveaus) 0, 250, 500, 750 und 1000 mb diskretisiert. Größen, die in diesen Niveaus definiert sind, werden durch die unteren Indizes 0, 1, 2, 3 bzw. 4 gekennzeichnet. Als Variable werden die Stromfunktion $\psi = (\Psi_1 + \Psi_3)/2$ des vertikal gemittelten geostrophischen Windes $\underline{\underline{v}}_g = \underline{\underline{k}} \times \underline{\underline{\nabla}} \psi$ und die Stromfunktion $\epsilon = (\Psi_1 - \Psi_3)/2$ des thermischen Windes $\underline{\underline{\hat{v}}}_g = \underline{\underline{k}} \times \underline{\underline{\nabla}} \epsilon$ benutzt. Letztere ist wegen der hier gültigen Form der thermischen Windgleichung

$$(2.1) \quad \underline{\underline{k}} \times \underline{\underline{\nabla}} \epsilon = \frac{R}{2f_0} \underline{\underline{k}} \times \underline{\underline{\nabla}} T_2$$

1) Hiermit sind nicht die für die Dissipation verantwortlichen 'Mikroskales' gemeint.

gleichzeitig ein Maß für die Temperatur in 500 mb. Die vertikal diskretisierten Gleichungen sind die prognostischen Gleichungen für die vertikal gemittelte Vorticity (= barotrope Vorticity) $\bar{\zeta} = \nabla^2 \psi$, die thermische Vorticity $\hat{\zeta} = \nabla^2 \epsilon$ und die Temperatur im 500 mb-Niveau. Vertikale Differenzierungen sind durch zentrierte Differenzen auf dem p-Gitter ersetzt. Die dazu erforderlichen Randbedingungen an der Ober- (0 mb) und Untergrenze (1000 mb) des Integrationsgebietes bestehen im Verschwinden der generalisierten Vertikalgeschwindigkeit $\omega = \frac{dp}{dt}$ in beiden Niveaus

$$\omega_0 = \omega_4 = 0,$$

im Verschwinden der Schubspannung an der Obergrenze $\underline{\tau}_0 = 0$ sowie in der Angabe der Schubspannung an der Untergrenze $\underline{\tau}_4$ (siehe 2.2.) Man erhält:

$$(2.2a) \quad \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi = -J(\psi, \nabla^2 \psi) - J(\epsilon, \nabla^2 \epsilon) - \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{g}{2p_2} \underline{k} \cdot \underline{\nabla} \times \underline{\tau}_4;$$

$$(2.2b) \quad \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \epsilon = -J(\psi, \nabla^2 \epsilon) - J(\epsilon, \nabla^2 \psi) - \beta \frac{\partial \epsilon}{\partial x} - f_0 \frac{\omega_2}{p_2} + \\ - \frac{g}{p_2} \underline{k} \cdot \underline{\nabla} \times (\underline{\tau}_2 - \underline{\tau}_4);$$

$$(2.2c) \quad \frac{\partial}{\partial t} \epsilon = -J(\psi, \epsilon) + \frac{p_2}{2f_0} \sigma \omega_2 + \frac{R}{2f_0 c_p} \dot{q}.$$

Hierin sind p_2 (= 500 mb) das doppelte Druckinkrement und σ ($= -\frac{1}{\rho \theta} \frac{\partial \theta}{\partial p}$) das konstante statische Stabilitätsmaß im Niveau 2. Die Terme auf der rechten Seite von (2.2a) haben der Reihe nach folgende Bedeutung: Advektion von $\bar{\zeta}$ mit $\underline{\bar{v}}_g$, Advektion von $\hat{\zeta}$ mit $\underline{\hat{v}}_g$, β -Effekt, Dissipation an der 1000 mb-Fläche (Bodenreibung). Die Terme in (2.2b) bedeuten: Advektion von $\bar{\zeta}$ mit $\underline{\bar{v}}_g$, Advektion von $\hat{\zeta}$ mit $\underline{\hat{v}}_g$, β -Effekt, Einfluß des divergenten ¹⁾ Windanteiles, Dissipation in 500 mb (innere Reibung) und Bodenreibung. In (2.2c) treten auf: Advektion von T_2 mit $\underline{\bar{v}}_g$, Temperaturadvektion durch die Vertikalbewegung und diabatische Wärmequelle in 500 mb.

1) Die Kontinuitätsgleichung angewandt in den Niveaus 1, bzw. 3 hat die Gestalt: $\frac{\omega_2}{p_2} = -\underline{\bar{v}} \cdot \underline{\bar{v}}_1, \frac{\omega_2}{p_2} = \underline{\bar{v}} \cdot \underline{\bar{v}}_3.$

2.2. Parameterisierung von turbulenter Schubspannung und diabatischer Wärmequelle

Im Niveau 4 (Boden) ist die Schubspannung entgegengesetzt zum 'Bodenwind' gerichtet, mit dem geostrophischen Bodenwind $\underline{v}_{g4}$ soll sie einen konstanten Winkel einschließen. Ihr Betrag ist proportional zu $|\underline{v}_{g4}|$. Bei Einführung einer Bodenvorticity kann man schreiben:

$$(2.3a) \quad \frac{g}{P_2} \underline{k} \cdot \underline{v} \times \underline{r}_4 = k \zeta_4.$$

k heißt Bodenreibungskoeffizient und hat den Wert $4 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}$. Die Bodenvorticity wird linear aus den Niveaus 1 und 3 extrapoliert:

$$(2.3b) \quad \zeta_4 = \frac{3}{2}\zeta_3 - \frac{1}{2}\zeta_1 = \nabla^2\psi - 2\nabla^2\epsilon.$$

Nach CHARNEY (1959) wird ein Dissipationsmechanismus durch vertikalen Impulstransport in der freien Atmosphäre eingeführt. Die Schubspannung im Niveau 2 wird hierbei proportional und entgegengerichtet zur Windscherung in diesem Niveau angesetzt. Man erhält:

$$(2.3c) \quad \frac{g}{P_2} \underline{k} \cdot \underline{v} \times \underline{r}_2 = -k_i (\zeta_3 - \zeta_1) = 2k_i \nabla^2 \epsilon.$$

$k_i = 0.5 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}$ heißt Koeffizient der inneren Reibung.

Ebenfalls nach CHARNEY erfolgt die Parametrisierung der diabatischen Wärmequelle $\dot{q}$ durch die Abweichung der Temperatur in 500 mb, T_2 , von einer vorgegebenen Strahlungsgleichgewichtstemperatur T_2^* :

$$(2.3d) \quad \dot{q} = h (T_2^* - T_2).$$

In Bezug auf Einzelheiten der Parametrisierung wird auf CHARNEY verwiesen. Mit den von ihm angegebenen Daten errechnet sich der Erwärmungskoeffizient h zu $7.835 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ s}^{-3} \text{ K}^{-1}$ (oder $\text{KJ to}^{-1} \text{ s}^{-1} \text{ K}^{-1}$). Dabei wurde angenommen, daß T_2 und T_2^* beide denselben zeitlich konstanten horizontalen Mittelwert besitzen. Definiert man eine Stromfunktion ϵ^* des durch T_2^* vorgegebenen thermischen Windes,

so kann mit (2.1) die Gleichung (2.3d) übergeführt werden in:

$$(2.3e) \quad \dot{q} = \frac{2f_0}{R} h (\epsilon^* - \epsilon).$$

Der Faktor vor der Klammer auf der rechten Seite von (2.3e) hat die Dimension s^{-2} .

2.3. Horizontale Diskretisierung

Nach Einsetzen der Parameterisierungsansätze in die Gleichungen (2.2a-c) und Elimination von ω_2 erhält man die beiden prognostischen Gleichungen:

$$(2.4a) \quad \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi = - J(\psi, \nabla^2 \psi) - J(\epsilon, \nabla^2 \epsilon) - \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} - k(\nabla^2 \psi - 2\nabla^2 \epsilon);$$

$$(2.4b) \quad \frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 - \lambda^2) \epsilon = - J(\psi, \nabla^2 \epsilon) - J(\epsilon, \nabla^2 \psi) - \beta \frac{\partial \epsilon}{\partial x} + \lambda^2 J(\psi, \epsilon) - 2k_1 \nabla^2 \epsilon + k(\nabla^2 \psi - 2\nabla^2 \epsilon) - \frac{h}{c_p} (\epsilon^* - \epsilon);$$

mit $\lambda^2 = 2f_0^2 / (\sigma p_2^2)$ und $[\lambda^2] = m^{-2}$. Das horizontale Integrationsgebiet für (2.4a,b) sei begrenzt durch:

$$(2.5) \quad 0 \leq x \leq 2\pi L; \quad 0 \leq y \leq \pi L.$$

Die positive x-Achse ist nach E, die positive y-Achse nach N gerichtet. L hat die Dimension einer Länge. Zur Diskretisierung der Variablen ψ und ϵ sowie der Gleichungen (2.4a,b) wird die Spektralmethode verwandt. Die Auswahl der erforderlichen Orthogonalfunktionen wird von LORENZ (1963b) übernommen:

$$(2.6) \quad \begin{aligned} F_1 &= \sqrt{2} \cos y_0 \\ F_2 &= \sqrt{2} \cos 2y_0 \\ F_3 &= 2 \sin y_0 \cos nx_0 \\ F_4 &= 2 \sin 2y_0 \cos nx_0 \\ F_5 &= 2 \sin y_0 \sin nx_0 \\ F_6 &= 2 \sin 2y_0 \sin nx_0 \end{aligned}$$

Hierbei sind $x_0 = x/L$ und $y_0 = y/L$ normierte Koordinaten (im Bogenmaß). Das System (2.6) berücksichtigt nur eine einzige x_0 -Wellenzahl n sowie die beiden y_0 -Wellenzahlen 1 und 2. Letztere werden mit der Terminologie von LORENZ als Mode bezeichnet. Die Orthogonalfunktionen F_i sind auf dem Integrationsgebiet (2.5) definiert und erfüllen die Orthonormalitätsbedingung:

$$\frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} F_j F_k dx_0 dy_0 = \delta_{jk}; \quad j, k = 1, 2, \dots, 6.$$

Die Variablen ψ und ϵ werden in folgende endliche Reihen entwickelt

$$(2.7a) \quad \psi = L^2 f_0 \sum_{i=1}^6 \psi_i F_i;$$

$$(2.7b) \quad \epsilon = L^2 f_0 \sum_{i=1}^6 \epsilon_i F_i.$$

Die Entwicklungskoeffizienten dieser Reihen (spektrale Amplituden) sind dabei durch den Skalierungsfaktor $L^2 f_0$ dimensionslos gemacht. Die Stromfunktion ϵ^* des ausgeprägten thermischen Windes wird nur proportional F_1 vorgeschrieben:

$$(2.8) \quad \epsilon^* = L^2 f_0 \epsilon_1^* F_1.$$

Mit (2.6) ist eine Aufspaltung in eine nur y -abhängige Grundströmung sowie x - und y -abhängige Störungen bereits a priori gegeben. Im folgenden werden deshalb spektrale Amplituden mit Indizes ≤ 2 als Grundströmungsamplituden, solche mit Indizes > 2 als Störungsamplituden klassifiziert.

Die seitlichen Randbedingungen sind

$$(2.9) \quad \bar{v}_g = \hat{v}_g = 0, \quad \text{für } y_0 = 0, \pi$$

und wegen $\bar{v}_g = \frac{\partial \psi}{\partial x_0}$, $\hat{v}_g = \frac{\partial \epsilon}{\partial x_0}$, (2.6) und (2.7) automatisch erfüllt.

Die in den Gleichungen (2.4a,b) auftretenden räumlichen Differentialoperatoren wirken wegen (2.7) nur auf die Orthogonalfunktionen F_i und können durch algebraische Ausdrücke ersetzt werden:

$$(2.10a) \quad L^2 \nabla^2 F_i = -a_i^2 F_i,$$

$$(2.10b) \quad L \frac{\partial}{\partial x_0} F_i = \sum_{j=1}^6 b_{ij} F_j,$$

$$(2.10c) \quad L^2 J(F_j, F_k) = \sum_{i=1}^6 c_{ijk} F_i.$$

(2.10a,b) gelten exakt, bei (2.10c) werden diejenigen Anteile von $J(F_j, F_k)$ vernachlässigt, die nicht proportional zu einer Orthogonalfunktionen F_i sind. Die numerischen Werte der Koeffizienten können unter Verwendung der oben angeführten Orthonormalitätsbedingung analytisch bestimmt werden (vergl. Anhang 3).

2.4. Die spektralen Gleichungen des Zirkulationsmodells

Einsetzen von (2.7a,b) und (2.8) in (2.4a,b) unter Verwendung von (2.10a-c) liefert ein System von 12 gewöhnlichen DGLen. Unter Einführung folgender dimensionsloser Koeffizienten

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= L^{-2} \lambda^{-2} \\ K &= 0.5 k f^{-1} \\ 2K_i &= 2k_i f^{-1} \\ H &= h c_p^{-1} f_0^{-1} \\ B &= \beta L f_0^{-1} \end{aligned} \quad (2.11)$$

erhält man:

$$\begin{aligned} (2.12a) \quad \frac{1}{f_0} \frac{d}{dt} \psi_i &= \sum_{j,k=1}^6 c_{ijk} \frac{a_j^2 - a_k^2}{a_i^2} (\psi_j \psi_k + \epsilon_j \epsilon_k) + B \sum_{j=1}^6 \frac{b_{ij}}{a_i^2} \psi_j - \\ &- K(\psi_i - 2\epsilon_i); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2.12b) \quad \frac{1}{f_0} \frac{d}{dt} \epsilon_i = & \sum_{j,k=1}^6 c_{ijk} \left(\frac{\sigma_0 (a_j^2 - a_k^2) + 1}{\sigma_0 a_i^2 + 1} \psi_k \epsilon_j + \frac{\sigma_0 (a_j^2 - a_k^2) - 1}{\sigma_0 a_i^2 + 1} \psi_j \epsilon_k \right) \\
 & + B \sum_{j=1}^6 \frac{\sigma_0 b_{ij} \epsilon_j}{\sigma_0 a_i^2 + 1} - \frac{\sigma_0 a_i^2 (2K_i + 2K) + H}{\sigma_0 a_i^2 + 1} \epsilon_i + \\
 & + K \frac{\sigma_0 a_i^2}{\sigma_0 a_i^2 + 1} \psi_i + \frac{H}{\sigma_0 a_i^2 + 1} \epsilon_i^* .
 \end{aligned}$$

$$i = 1, 2, \dots, 6.$$

Die Gleichungen (2.12a,b) bilden das vollständige Gleichungssystem des in dieser Arbeit betrachteten Zirkulationsmodells. Es handelt sich dabei um eine modifizierte spektrale Version des Modells von PHILLIPS (1956) mit nur 12 Freiheitsgraden. Das System (2.12a,b) kann mit geeigneten Verfahren numerisch integriert werden (siehe hierzu: Anhang 2).

Die nichtlinearen Terme in (12.a) sind die jeweils i-ten spektralen Komponenten von $\nabla \cdot (\bar{\nabla}_g \bar{\zeta}_g + \hat{\nabla}_g \hat{\zeta}_g)$. Wie Anhang 3 entnommen werden kann, sind die hierin auftretenden Wechselwirkungskoeffizienten für $i = 1$ identisch Null ($c_{1jk}(a_j^2 - a_k^2) = 0$). Damit leistet jedoch die obige Divergenz eines Vorticitytransportes keinen Beitrag zur Änderung des Grundströmungsanteiles im 1. Mode von $\bar{\zeta}_g$. Die nichtlinearen Terme in (2.12b) setzen sich dagegen aus zwei Anteilen zusammen, nämlich $\nabla \cdot (\bar{\nabla}_g \hat{\zeta}_g + \hat{\nabla}_g \bar{\zeta}_g)$ und $\nabla \cdot \bar{\nabla}_g T_2$. Auch hier gilt für die Divergenz des Vorticitytransportes hinsichtlich des 1. Modes der Grundströmung die oben gemachte Einschränkung. Die Divergenz des Temperaturtransportes kann jedoch aufgrund der hier gültigen Wechselwirkungskoeffizienten (c_{ijk}) eine von Null verschiedene 1. spektrale Komponente besitzen. Dies ist zugleich der einzige nichtlineare Mechanismus, der direkt auf den 1. Mode der Grundströmung (ϵ_1) wirkt. Mit der bereits erwähnten Ausnahme sind für die in (2.12a,b) auftretenden Wechselwirkungskoeffizienten alle in der Abb. 2-1 schematisch angedeuteten Kombinationen i,j,k möglich. Daß darunter keine nichtlinearen Wechselwirkungen zwischen drei Störungsamplituden auftreten, ist auf die geringe Anzahl der Freiheitsgrade des

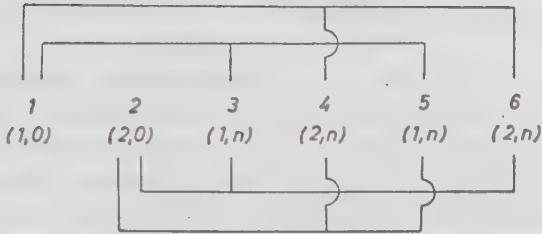


Abb. 2-1: Schematische Darstellung der Kombinationen i, j, k mit nichtverschwindenden Wechselwirkungskoeffizienten c_{ijk} . Obere Zeile: Spektrale Ordnungsnummern. Untere Zeile: (Mode, Wellenzahl).

Modells zurückzuführen. Die Bedeutung der in (2.12a,b) auftretenden linearen Terme kann durch Vergleich mit (2.4a,b) gefunden werden.

Trotz formaler Ähnlichkeit mit dem von LORENZ (1963b) verwendeten Gleichungssystem, beinhalten (2.12a,b) einige wesentliche Unterschiede:

Die statische Stabilität ist zeitlich konstant angesetzt, ebenso wie die nicht explizit auftretende horizontale Mitteltemperatur der 500 mb-Fläche. Im Gegensatz zu LORENZ ist ferner der β -Effekt berücksichtigt. Der Bodenwind wird linear aus den Niveaus 1 und 3 extrapoliert, während LORENZ nur das Niveau 3 verwendet. Ein Hauptunterschied liegt auch in der Größenordnung der Parametrisierungskoeffizienten K, K_1 und H , welche bei LORENZ um eine Zehnerpotenz höher liegt.

2.5. Inneres und äußeres System

Nach Kapitel 1 umfaßt das innere System die 12 Variablen ψ_i und ϵ_i , $i = 1, 2, \dots, 6$. Eine anschaulichere Beschreibung des Zustandes des inneren Systems erhält man durch Umformung der abgehackten Fourierreihen (2.7a,b), so daß ψ und ϵ jeweils als eine Summe von Wellen dargestellt werden. Jede dieser Wellen ist gekennzeichnet durch eine Wellenzahl n und einen Mode m (symbolisch: (m,n)). Die Amplituden und Phasen der Störungswellen sind durch Beziehungen der folgenden Art mit den spektralen Amplituden verknüpft:

$$\psi(1,n) \sin y_0 \cos(nx_0 - \alpha(1,n)) = \sin y_0 (\psi_3 \cos nx_0 + \psi_5 \sin nx_0).$$

Hierin bedeuten: $\psi(1,n) = \sqrt{\psi_3^2 + \psi_5^2}$, $\alpha(1,n) = \arctan(\psi_5/\psi_3)$.

Die Wellen bewegen sich nach Osten für: $\frac{da}{dt} > 0$. Die Amplituden der nur y -abhängigen Grundströmung sind gleich den entsprechenden spektralen Amplituden.

Das äußere System wird definiert durch die Parameter ϵ_0, K, K_1, H, B und ϵ_1 . Dabei mag die Frage aufkommen, ob es sinnvoll ist auch die statische Stabilität ϵ_0 sowie K_1 in dieser Liste aufzuführen, da beide eigentlich charakteristische innere Größen für den Zustand der Atmosphäre sind. Um jedoch die in Kapitel 1 gegebenen, klaren Definitionen von innerem und äußerem System beibehalten zu können, wird hier - in Abweichung von der üblichen Betrachtungsweise so verfahren. Anstelle von ϵ_1^* wird eine 'aufgeprägte thermische Rossbyzahl Ro_T^* eingeführt:

$$(2.13) \quad Ro_T^* = \frac{u_T^*}{L f_0} = \epsilon_1^* .$$

Dabei ist u_T^* das horizontale Maximum des durch die Strahlungsgleichgewichtstemperatur erzwungenen thermischen Windes u_T ,

$$u_T = L f_0 \sqrt{2} \epsilon_1^* \sin y_0 .$$

3. Zirkulationsformen

Die geometrische Konfiguration des Strömungsfeldes der betrachteten Modellatmosphäre ist in eindeutiger Weise durch den momentanen Zustand des inneren Systems festgelegt. Als Zirkulationsform wird deshalb hier ein charakteristisches Verhalten des inneren Systems bezeichnet, welches durch Integration des Modellgleichungssatzes (2.12a,b) bei festem Zustand des äußeren Systems berechnet wurde. Wie LORENZ (1963b) und QUINET (1973a,b) zeigen, treten bei Modellen mit wenigen Freiheitsgraden eine Reihe typischer Zirkulationsformen auf, die etwa den bei Dishpan-Versuchen (vergl. FULTZ 1959) beobachteten Zirkulationstypen entsprechen. Da die Modelle dieser Autoren jedoch eine dem inneren System zugeordnete statische Stabilität besitzen, also über mehr Freiheitsgrade verfügen, muß erwartet werden, daß das vorliegende Modell in Abhängigkeit vom äusseren System weniger Zirkulationsformen als die von LORENZ und QUINET beobachteten besitzt. In diesem Kapitel werden teils mit analytischen Methoden, teils mit Hilfe deterministischer Vorhersagen die Zirkulationsformen des in Kapitel 2. vorgestellten Modells für verschiedene Werte der aufgeprägten thermischen Rossbyzahl Ro_T^* untersucht.

3.1. Die stationäre Hadleyzirkulation (HZ)

Nach der Terminologie von FULTZ, bzw. LORENZ ist die HZ dadurch gekennzeichnet, daß keine wandernden wellenartigen Störungen beobachtet werden. Das innere System ist dabei nicht von der Zeit abhängig. Dann kann (vergl. LORENZ 1962) eine analytische Lösung des Modells (2.12a,b) gefunden werden, wenn man voraussetzt,¹⁾ daß die HZ für alle Zustände des äusseren Systems mathematisch möglich ist. Setzt man in (2.12a,b):

$\psi_{i,\epsilon_i} = 0$ für $2 \leq i \leq 6$, und $\psi_{i,\epsilon_i} = \text{const.}$ für $i \leq 2$,
so reduzieren sich die Modellgleichungen auf je 2 Paar linearer Gleichungen für ψ_{2,ϵ_1} bzw. ψ_{2,ϵ_2} . Da die Strahlungsgleichge-

1) Dies ist notwendig, da nicht von vornherein bekannt ist, für welche Zustände des äusseren Systems die Zirkulationsform tatsächlich eine HZ ist.

wichtstemperatur proportional zu $\cos y_0$ ist, sind die Gleichungen für die Grundströmungsamplituden im 2. Mode homogen und besitzen nur die triviale Lösung. Die Gleichungen der HZ sind somit:

$$(3.1a) \quad \psi_1 - 2\epsilon_1 = 0;$$

$$(3.1b) \quad -K\sigma_0\psi_1 + (\sigma_0(2K + 2K_1) + H)\epsilon_1 = H \text{ Ro}_T^*.$$

oder umgeformt:

$$(3.2a) \quad \psi_1 = 2\epsilon_1;$$

$$(3.2b) \quad \epsilon_1 = 1/(1 + (2K_1\sigma_0/H)) \text{ Ro}_T^*.$$

Der physikalische Gehalt von (3.1), bzw. (3.2) soll kurz angedeutet werden. (3.2b) besagt, daß der aktuelle Temperaturgradient der HZ kleiner ist, als der Gradient der Gleichgewichtstemperatur. Daraus folgt, daß in der nördlichen Hälfte des Kanals ($y_0 > \pi/2$) Wärme entzogen, in der südlichen Hälfte dagegen Wärme zugeführt wird. Wie man mit Hilfe einer spektralen Version der hier gültigen ω -Gleichung (vergl. QUINET 1973a) zeigen kann, ist dies mit einer absinkenden, bzw. aufsteigenden Bewegung verbunden. Aus Gründen der Massenerhaltung sind damit rein nichtgeostrophische meridionale Strömungen ($|| y_0$ -Achse) verknüpft, und zwar eine Nord-Strömung im oberen Niveau (250mb) und eine entgegengerichtete, gleichstarke Strömung in 750 mb. Der geostrophische Anteil des Windes besitzt dagegen nur eine Komponente in Richtung der positiven x_0 -Achse, wobei wegen (3.2a) der Jet in 250 mb die 3-fache Stärke des Westwindes in 750 mb besitzt. Dies wiederum hat einen verschwindenden Bodenwind zur Folge.

3.2. Die Stabilität der HZ

Zwar ist die HZ nach (3.2a,b) für alle Zustände des äusseren Systems eindeutig festgelegt, für gewisse Zustände kann sie sich jedoch als instabil gegenüber eingelagerten x -abhängigen

Störungen erweisen. Diese Instabilität ist die barokline Instabilität, welche ein Anwachsen der Störungen, und damit über die nun nicht mehr vernachlässigbaren nichtlinearen Wechselwirkungen die Zerstörung der HZ und die Entstehung anderer Zirkulationsformen bewirken kann. Unter der Annahme, daß die eingelagerten Störungen klein sind gegenüber der als konstant betrachteten Grundströmung, kann eine lineare barokline Stabilitätsanalyse durchgeführt werden. Dabei wird eine von LORENZ (1962) entwickelte Methode benutzt. Das Verfahren liefert die Abhängigkeit der Stabilität der HZ vom äusseren System bei gegebener geometrischer Gestalt der Störungen (Wellenzahl n und Mode m) und ist in Anhang 1 beschrieben.

In den Abbildungen 3-1a,b sind die Stabilitätsgrenzkurven in der (K^{-1}, Ro_T^*) -Ebene für Störungen der geometrischen Gestalt $(1,n)$, bzw. $(2,n)$ dargestellt. Die Nummerierung der Kurven entspricht dabei den ganzzahligen Wellenzahlen $1 \leq n \leq 6$. Wie in Anhang 1 erläutert, sind die Parameter K_i und H in ein festes Verhältnis zu K gesetzt; für den dimensionslosen Parameter der statischen Stabilität σ_0 wurde der Wert 0.0277 angenommen. An der Abszisse ist K von rechts nach links zunehmend aufgetragen, K^{-1} nimmt also von links nach rechts zu. Diese Art der Darstellung lehnt sich an LORENZ an, der - im Hinblick auf eine Anpassung an die Ergebnisse der Dishpanversuche - Änderungen von $K^{-1} = 2f_0/k$ als Änderungen der Rotationsgeschwindigkeit f_0 des Systems interpretiert. Demgegenüber soll hier ein Fortschreiten auf der Abszisse von rechts nach links als Zunahme des Reibungseinflusses interpretiert werden.

Die Gebiete mit stabiler (bzw. instabiler) HZ liegen unterhalb (bzw. oberhalb) der jeweiligen neutralen Kurven. Allgemein ist festzustellen, daß in Richtung zunehmender Reibung die Stabilität der HZ in dem Sinne wächst, daß immer höhere thermische Rossbyzahlen (d.h. Gleichgewichtstemperaturgradienten) erforder-

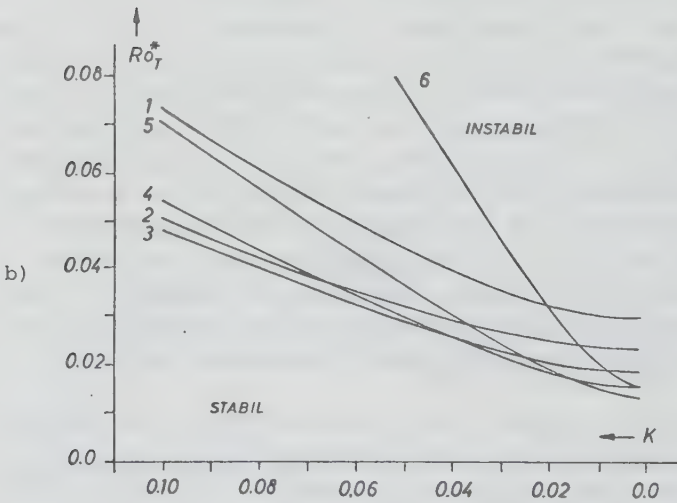
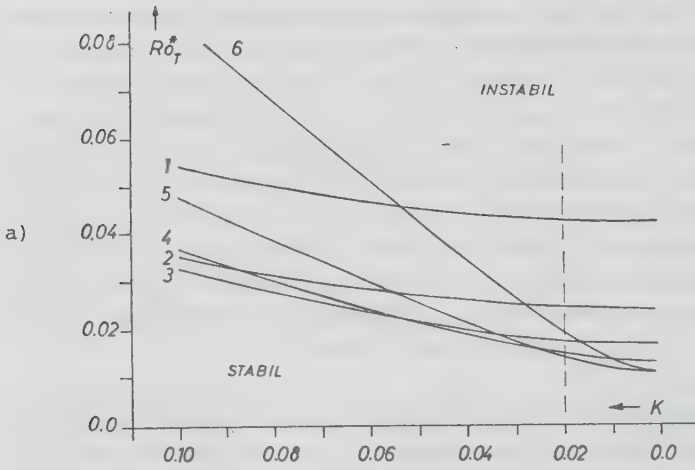


Abb. 3-1: Stabilitätsgrenzkurven der HZ in der (K^{-1}, Ro_T^*) -Ebene

a): Störungswellen (1,n), $1 \leq n \leq 6$.

b): Störungswellen (2,n), $1 \leq n \leq 6$.

lich sind, um barokline Instabilität zu ermöglichen. Der Vergleich beider Abbildungen läßt erkennen, daß die Stabilitätsgrenzen für den 2. Mode bei höheren thermischen Rossbyzahlen liegen, als die für den 1. Mode. Ferner beobachtet man, daß die instabilste Wellenzahl n^* vom Zustand des äusseren Systems abhängig ist. Dieses Phänomen tritt bei den LORENZschen Untersuchungen nicht auf und ist auf die Berücksichtigung der y -Variation des Coriolisparameters (β -Effekt) zurückzuführen. Mit abnehmender Reibung verschiebt sich n^* zu größeren Wellenzahlen, d.h. kürzeren Wellenlängen. Die Abweichung der dargestellten Kurven vom Fall $\beta = 0$ (vergl. Anhang 1, Abbildung 1 und 2) ist um so stärker, je niedriger die Wellenzahl ist. Erwartungsgemäß macht sich also der β -Effekt bei den langen Wellen am stärksten bemerkbar. Geometrisch gesehen handelt es sich bei den Kurven um Hyperbeläste, wobei die Asyptotenschnittpunkte auf der Ro_T^* -Achse ($K = 0$) liegen. Für großes K verlaufen die Kurven somit nahezu linear. Damit kann jedoch insbesondere ein Reibungsparameter K_{max} , der dadurch definiert ist, daß für $K > K_{max}$ keine Instabilität mehr möglich ist (Analogie zu den Dishpan-Ergebnissen von FULTZ), nicht auftreten. Die damit verbundene Restabilisierung der HZ für hohe thermische Rossbyzahlen (d.h. bei $K \ll K_{max}$ findet LORENZ einen Übergang von instabiler zu stabiler HZ) ist ein Effekt der bei LORENZ dem inneren System zugeordneten statischen Stabilität und deshalb hier nicht möglich.

3.3. Zirkulationsformen mit x -abhängigen Wellen

Nun werden diejenigen Gebiete des äusseren Systems betrachtet, in denen sich die HZ nach der linearen Theorie von 3.2. instabil gegenüber x -abhängigen Störungen verhalten soll. Untersuchungen werden mit Hilfe deterministischer Vorhersagen für verschiedene, aber jeweils feste Ro_T^* durchgeführt. Die übrigen Parameter des äusseren Systems bleiben unverändert.

Die betrachteten Punkte des äußeren Systems liegen alle auf der in Abbildung 3-1a gestrichelt angedeuteten Geraden.

Zusätzlich zum äußeren System müssen auch noch die geometrischen Abmessungen der Störungen durch Angabe einer x_0 -Wellenzahl spezifiziert werden. Es wurde die an der Stelle $K = 0.02$ instabilste Wellenzahl $n = 5$ ausgewählt. Damit liegen die Instabilitätsgrenzen für Störungen des Typs $(1,5)$ bei $Ro_T^* = 0.0144$, für $(2,5)$ bei $Ro_T^* = 0.0211$.

Bei der Festlegung der Anfangsbedingungen wurde immer von einer HZ (nach 3.2a,b) mit eingelagerten kleinen Störungen in beiden Modes ausgegangen. Die Vorhersagezeit beträgt in jedem Fall 500 Tage, was eine Computerzeit von ca. 5 s auf der IBM 360/91 des IPP in Garching bei München erforderte. In den folgenden Abbildungen sind nicht die spektralen Amplituden selbst, sondern die in Kapitel 2 aus ihnen abgeleiteten Wellenamplituden dargestellt.

3.3.1. $Ro_T^* = 0.015$

Bei dem ersten numerischen Experiment liegt Ro_T^* nur knapp oberhalb der Instabilitätsgrenze der HZ in Bezug auf Störungen $(1,5)$. Der Verlauf von Grundströmungs- und Störungsamplituden während der ersten 225 Tage des Versuchs ist in Abbildung 3-2 dargestellt.

Die in die HZ eingepflanzte kleine Störung (nur ψ_3 und ψ_4) bewirkt zunächst über die nichtlinearen Mechanismen des Modells die Entstehung sämtlicher anderer spektraler Amplituden (In der Abbildung konnten die $(2,0)$ -Wellen im gewählten Maßstab nicht mehr dargestellt werden, sie sind jedoch vorhanden. Auf die $\epsilon(1,0)$ -Welle wurde ebenfalls aus Maßstabsgründen verzichtet.). Nach 3 Tagen beginnt das barokline Anwachsen der beiden Störungen im 1. Mode $\psi(1,5)$ und $\epsilon(1,5)$, während die Störungsamplituden im 2. Mode abnehmen und nach ca. 40 Tagen im gewählten Maßstab nicht mehr erkennbar sind. Verbunden mit diesem baroklinen Anwachsen ist eine Verstärkung des Transportes fühlbarer

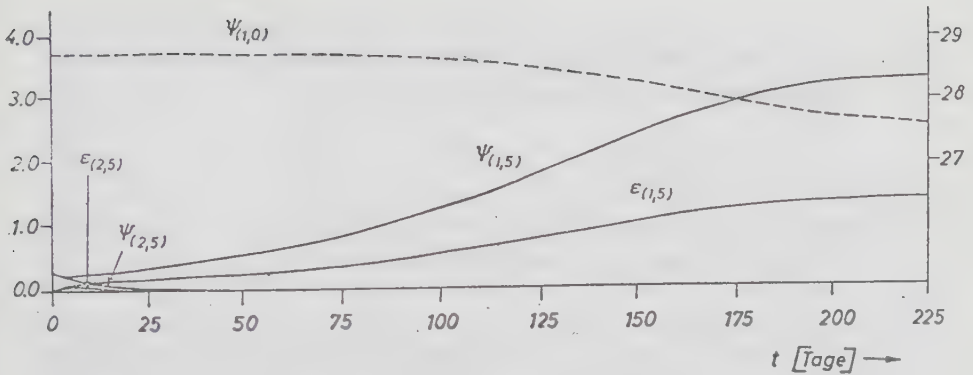


Abb. 3-2: Amplituden von Grundströmung und Störungswellen der geostrophischen Stromfunktionen ψ und ϵ in $10^{-3} L^2 f_0$ -Einheiten. Der rechte Ordinatenmaßstab bezieht sich auf $\psi(1,0)$, der linke auf die restlichen Amplituden.
 $Ro_T^* = 0.015$

Wärme durch die geostrophischen Störungen nach N, was sich in einer Abnahme des meridionalen Temperaturgradienten ϵ_1 niederschlägt. Dies impliziert eine Abnahme der vertikalen Windscherung und wegen der linearen Kopplung zwischen ψ_1 und ϵ_1 (in Abwesenheit von spektralen Amplituden im 2. Mode) die erkennbare Abnahme von $\psi(1,0)$. Gebremst wird diese Entwicklung durch die dissipativen Prozesse, während die diabatische Wärmequellen dem Abbau des meridionalen Temperaturgradienten entgegenwirkt. Es sei darauf hingewiesen, daß barotrope Vorgänge nach dem Verschwinden der Wellen im 2. Mode keine Rolle mehr spielen können. Nach ca. 250 Tagen (nicht mehr dargestellt) hat sich ein Gleichgewichtszustand zwischen den adiabatischen und den nichtadiabatischen Prozessen ausgebildet, d.h. das barokline Anwachsen der Wellen ist zum Stillstand gekommen. Sie behalten konstante Amplituden bei und verlagern sich mit konstanter Phasengeschwindigkeit c ($c = 5.79 \text{ ms}^{-1}$ für die (1,5)-Welle) in einer konstanten Grundströmung nach E; es handelt sich um Rossbywellen.

Für die Phasengeschwindigkeit dieser Wellen gilt die bekannte Rossbyformel (ROSSBY 1939), welche allerdings die y -Variation der Grundströmung nicht berücksichtigt:

$$c = U - \beta L^2 / (2\pi n)^2.$$

Mit $U = \text{Max}(U(500\text{mb}))$ ergibt sich $c = 5.91 \text{ ms}^{-1}$, was mit den beobachtetem Wert gut übereinstimmt.

Da nur Rossbywellen vom Typ $(1, n)$ auftreten, wird die bei $Ro_T^* = 0.015$ gefundene Zirkulationsform als stationäre Rossby-zirkulation im 1. Mode (RZ1) bezeichnet. Die RZ1 bleibt während der gesamten Vorhersagezeit stabil.

$$3.3.2. \underline{Ro_T^* = 0.0156}$$

LORENZ (1963b) zeigt, daß die RZ1 für geeignete Zustände des äußeren Systems instabil gegenüber Störungen im 2. Mode ist. Zur Überprüfung dieses Konzeptes für das vorliegende Modell wurden bei gleichem äußeren System zwei numerische Versuche mit unterschiedlichen Anfangsbedingungen durchgeführt. Im ersten Experiment (Exp. I) wurden kleine Störungen in beiden Modes (ψ_3, ψ_4) vorgegeben, so daß sich sämtliche spektralen Amplituden entwickeln können. In Exp. II wurde dagegen nur eine Anfangsstörung in Mode 1 benutzt. Aufgrund der Struktur der Wechselwirkungskoeffizienten c_{ijk} können dann spektrale Amplituden im 2. Mode nicht entstehen (vergl. LORENZ 1963b).

Das aus beiden Versuchen resultierende Verhalten des inneren Systems ist in Abbildung 3-3 anhand der Amplituden der ψ -Wellen wiedergegeben. Während der ersten 125 Tage haben $\psi(1,5)$ und $\psi(1,0)$ in beiden Experimenten denselben Verlauf, die in Exp. I zusätzlich vorhandenen spektralen Amplituden im 2. Mode spielen hier also offensichtlich noch keine Rolle. Das Modell strebt vielmehr in beiden Fällen eine RZ1 an. Während nun in Exp. II

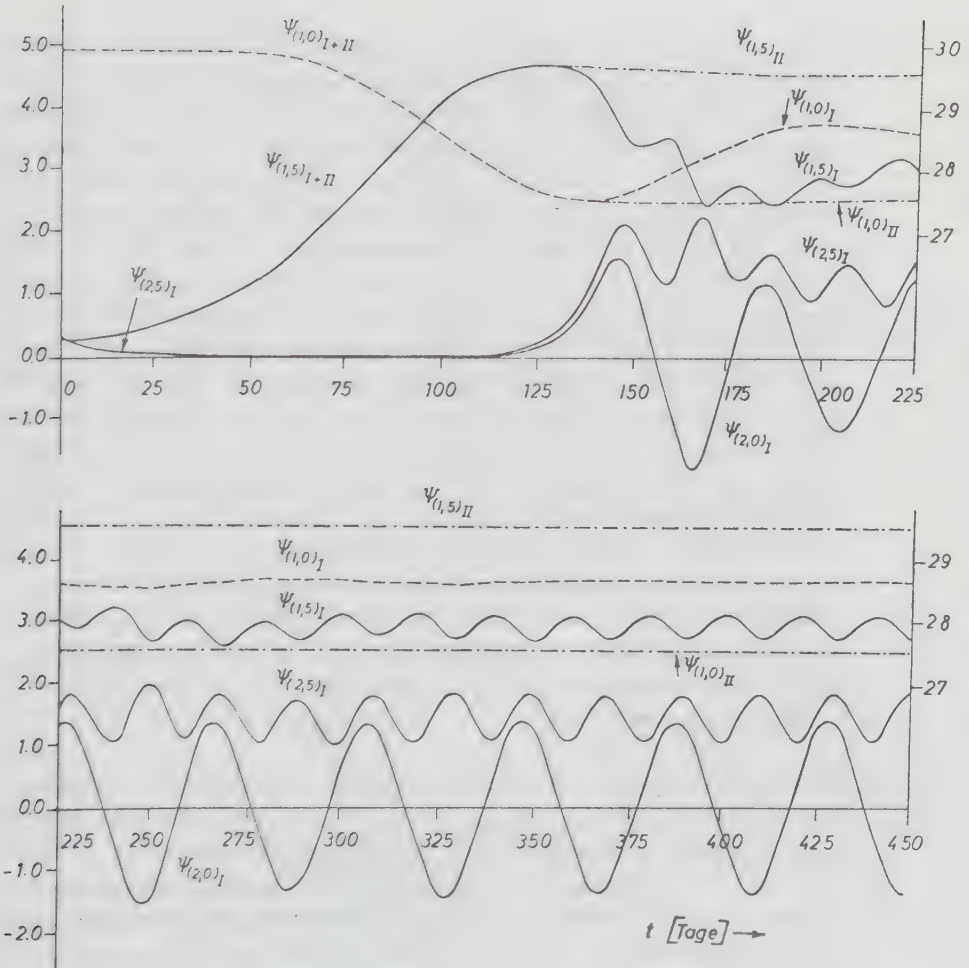


Abb. 3-3: Amplituden von Grundströmung und Störungswellen der geostrophischen Stromfunktion ψ in $10^{-3} L^2 f_0$ -Einheiten. Ordinatemaßstäbe wie Abb. 3-2
Index 'I': Experiment I; Index 'II': Experiment II.
 $Ro_T^* = 0.0156$

diese RZ1 stabil ist, d.h. $\psi(1,0)$ und $\psi(1,5)$ behalten konstante Werte bei (strichpunktierten Kurven), erweist sie sich in Exp. I als instabil gegenüber den zwar sehr kleinen, jedoch existenten Störungen im 2. Mode. Diese Instabilität kommt in einem Anwachsen der Wellen im 2. Mode sowie in einer Abnahme der Wellenamplituden im 1. Mode, verknüpft mit einem Anwachsen der Grundströmungsamplitude $\psi(1,0)$ zum Ausdruck. Außerdem spielt nun auch die Grundströmungsamplitude $\psi(2,0)$ eine deutlich erkennbare Rolle. Es sei übrigens darauf hingewiesen, daß diese Instabilität nicht mit der linearen baroklinen Theorie erklärt werden kann. Wie die Daten zeigen, beginnt das Anwachsen der (2,5)-Wellen mit dem 89. Tag. Der meridionale Temperaturgradient ε_1 , der nach der linearen Theorie für die barokline Instabilität verantwortlich ist, besitzt zu diesem Zeitpunkt einen Wert von 0.0145 und ist überdies in einer ständigen Abnahme begriffen. Nach der linearen Theorie (Abschnitt 3.2.) müßte er jedoch größer als 0.0185 sein. Es handelt sich hier um eine Instabilität aufgrund nichtlinearer Wechselwirkungen. Bemerkenswert ist ferner, daß die Grundströmung (1,0) bei Exp. II dieselben konstanten Amplituden besitzt, wie bei der RZ1 für $Ro_T^* = 0.015$, während die Amplituden der (1,5)-Wellen deutlich höher liegen.

Wie man in Abbildung 3-3 erkennen kann, führt diese Instabilität der RZ zu einer neuen Zirkulationsform. Etwa ab dem 300. Tag treten regelmäßige Oszillationen sämtlicher dargestellten Größen auf. Die Oszillationsperiode beider Störungswellen beträgt ca. 20 Tage, wobei zwischen beiden eine Phasenverschiebung von nahezu 1/2 Periode besteht. Die $\psi(1,5)$ -Welle ist jedoch intensiver als die $\psi(2,5)$ -Welle. Die $\psi(2,0)$ -Grundströmung oszilliert regelmäßig um die Nulllinie mit einer Periode von ca. 40 Tagen, also etwa dem Doppelten der Wellenperioden. An der $\psi(1,0)$ -Grundströmung ist dagegen keine Oszillation erkennbar. Diese Zirkulationsform wurde auch von LORENZ (1963b) beobachtet und von ihm als symmetrische Vacillation (SV) bezeichnet. Das synoptische Erscheinungsbild einer SV in einer 500 mb-Fläche ist eine Trog- und Rückenverteilung der geostrophischen Stromfunktion ψ , wobei sich sowohl die Intensität als auch die horizontale Achsen-

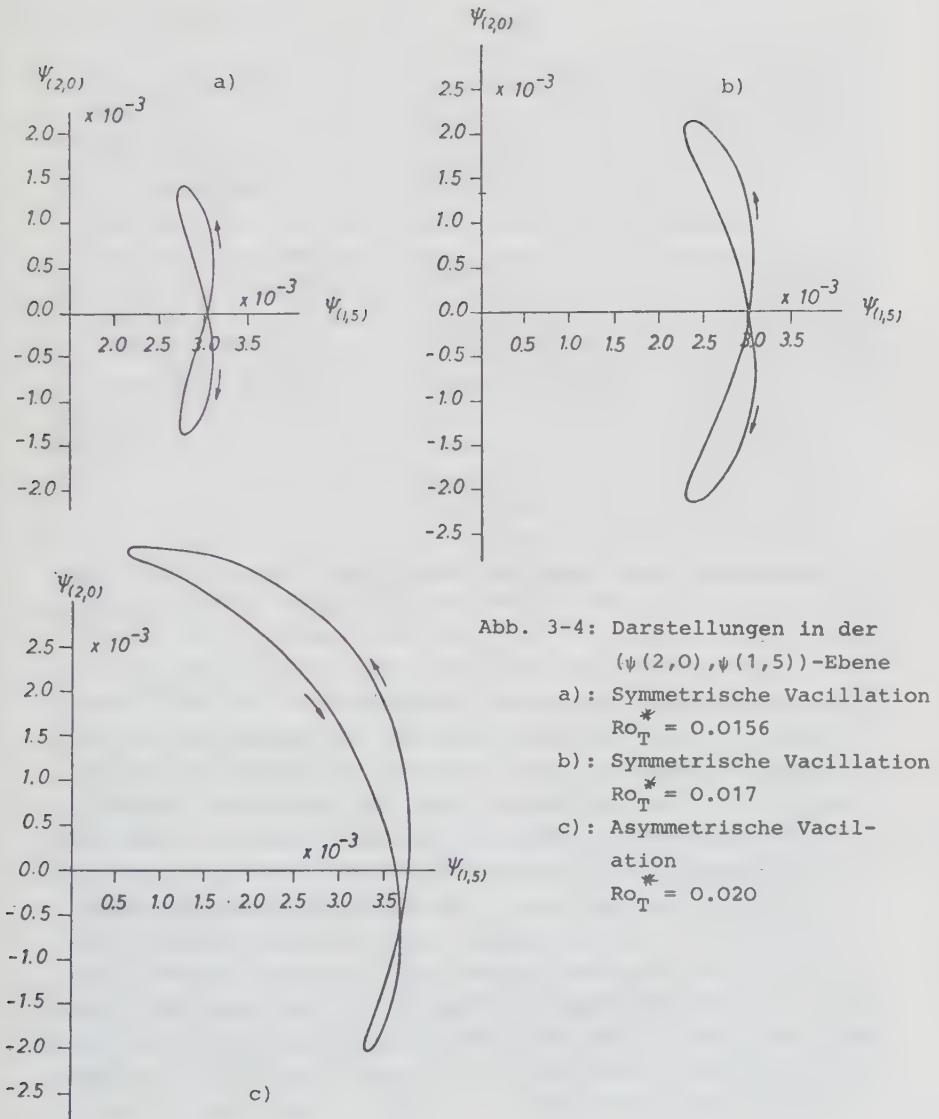


Abb. 3-4: Darstellungen in der $(\psi(2,0), \psi(1,5))$ -Ebene

a): Symmetrische Vacillation

$$Ro_T^* = 0.0156$$

b): Symmetrische Vacillation

$$Ro_T^* = 0.017$$

c): Asymmetrische Vacillation

$$Ro_T^* = 0.020$$

neigung dieser Gebilde periodisch ändern. Die Oszillation von $\psi(2,0)$ bewirkt wegen $\bar{u}_g = -\frac{\partial\psi}{\partial y}$ und (2.7a) eine regelmäßige N-S-Verlagerung des Zonalwindmaximums um die Mitte des Kanals. Auf eine eingehende Diskussion der SV wird verzichtet, da diesbezüglich auf die ausführliche Arbeit von QUINET (1974) verwiesen werden kann. Ein Vacillationszyklus ist in der $(\psi(2,0), \psi(1,5))$ -Ebene durch eine geschlossene Kurve charakterisiert, die symmetrisch zur $\psi(1,5)$ -Achse liegen muß. Abbildung 3-4a zeigt einen Vacillationszyklus aus Exp. I. Die Richtung in welcher die Kurve dabei durchlaufen wird, ist durch Pfeile angedeutet. Die Vacillationsperiode ist gleich der Oszillationsperiode von $\psi(2,0)$, nämlich 40 Tage. Die Gestalt der Vacillationkurve (Schmale Schleife) wird als typisch für die SV im vorliegenden Modell angesehen.

$$3.3.3. \quad \underline{Ro_T^* = 0.017, Ro_T^+ = 0.020}$$

Für den niedrigeren Wert der aufgeprägten thermischen Rossbyzahl ist die Zirkulationsform des Modells weiterhin eine SV. Den Vacillationszyklus für diesen Fall zeigt die Abbildung 3-4b. Obgleich sich die Oszillationsamplituden beider Variablen gegenüber dem Fall 0.0156 vergrößert und die Vacillationsperiode sich verkürzt haben, ist die als typisch für die SV erachtete Struktur der Kurve erhalten geblieben. Der Vacillationszyklus für den höheren Wert der thermischen Rossbyzahl ist in Abb. 3-4c dargestellt. Hier erkennt man eine deutliche Veränderung der Gestalt der Vacillationskurve, die nun nicht mehr symmetrisch zur $\psi(1,5)$ -Achse verläuft. Zugleich haben sich die Oszillationsamplituden beider Variablen extrem vergrößert und die Vacillationsperiode beträgt nur noch 14.6 Tage. Das Zonalwindmaximum führt nun periodische Schwankungen um einen Punkt in der südlichen Kanalhälfte aus. Eine periodische Zirkulationsform dieser Art bezeichnet LORENZ als asymmetrische Vacillation (AV).

$$3.3.4. \underline{Ro_T^*} = 0.024$$

Hier produziert das Modell schließlich eine stationäre Rossby-zirkulation im 2. Mode (RZ2). Diese entspricht der RZ1, wobei nur die Wellen vom 1. Mode durch die Wellen vom 2. Mode ersetzt sind. Die Grundströmung besteht dagegen weiterhin nur aus (1,0)-Anteilen.

Das synoptische Erscheinungsbild dieser Zirkulationsform besteht aus einer Abfolge von Trögen und Rücken in der südlichen Kanalhälfte und dem um die Kanalmitte gespiegelten Gegenstück dieser Verteilung in der nördlichen Kanalhälfte; vergleichbare Konstellationen wurden weder in atmosphärischen Karten noch bei Dishpanversuchen beobachtet. Wie bereits LORENZ betont, handelt es sich hierbei um eine mathematisch mögliche, aber unphysikalische Lösung des Modells. Sie erweist sich nur deshalb als stabil, weil das Modell über keine weiteren Freiheitsgrade mehr verfügt, mit deren Hilfe sich neue, realistischere Zirkulationsformen gestalten lassen würden.

3.4. Zusammenfassung

Bei festen Werten für die Parameter B , H , K_1 , σ_0 und K des äußeren Systems treten in Richtung zunehmender thermischer Rossbyzahl Ro_T^* die in Abbildung 3-5 angegebenen Zirkulationsformen HZ, RZ1, SV, AV und RZ2 auf. Die aufgefundenen Zirkulationsformen sind, wie bereits vermutet, alle auch von LORENZ (1963b) beobachtet worden. Eine nichtperiodische irreguläre Zirkulationsform konnte nicht gefunden werden. Dies hängt nicht mit der speziellen Wahl der oben erwähnten Parameter zusammen, vielmehr reicht die Anzahl der Freiheitsgrade des Modells nicht aus, um eine solche zu ermöglichen. (Bei konstanter statischer Stabilität sind hierzu wenigstens drei Wellenzahlen und zwei Modes erforderlich).

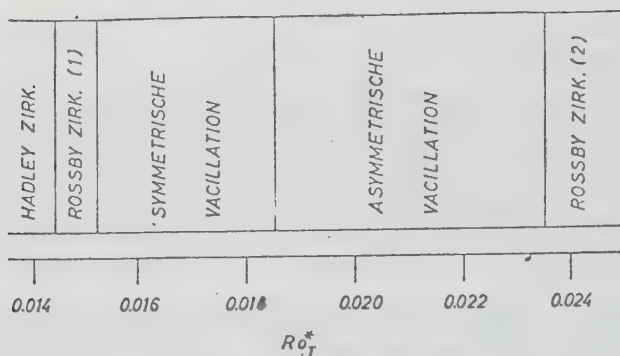


Abb. 3-5: Übersicht der Zirkulationsformen des Modells in Abhängigkeit von der aufgeprägten thermischen Rossbyzahl Ro_T^* .

Wegen der Zuordnung der statischen Stabilität zum äußeren System endet das Formenspektrum in Abb.3-5 in Richtung hoher thermischen Rossbyzahlen mit der RZ2. Es tritt kein abschließendes Gebiet mit stabiler HZ auf.

Es konnte gezeigt werden, daß die komplizierteren Zirkulationsformen als Instabilitäten einfacherer Zirkulationsformen aufgefaßt werden können, wobei dem Grad der Kompliziertheit durch die Anzahl der Freiheitsgrade des Modells eine Grenze gesetzt ist. Durch geeignete Wahl der Anfangsbedingungen können die einfachen Zirkulationsformen (HZ und RZ) für alle Zustände des äußeren Systems erzwungen werden. Dies ist insbesondere für die Klimauntersuchungen in den folgenden Kapiteln von Bedeutung.

4. Bestimmung von stationären Klimaten mit Monte-Carlo-Vorhersagen

Im vorhergehenden Kapitel wurden Zirkulationsformen in Abhängigkeit von der aufgeprägten thermischen Rossbyzahl Ro_T^* bestimmt. In diesem Kapitel werden nun Approximationen an die mit den Zirkulationsformen verbundenen Klimate, d.h. stationäre Klimate, mit Monte-Carlo-Vorhersagen berechnet. Im Falle der stationären Hadleyzirkulation ist die Klimabestimmung trivial, hier wäre eine Monte-Carlo-Vorhersage sinnlos. Die Klimabestimmung mit einer Monte-Carlo-Vorhersage wäre eigentlich nur bei einer nicht-periodischen, irregulären Zirkulationsform - wie sie in der Atmosphäre vorhanden ist - sinnvoll. Da unser Modell jedoch eine solche nicht aufweist, muß notgedrungen auf eine periodische Zirkulationsform zurückgegriffen werden. In der vorliegenden Arbeit geht es jedoch auch darum, Erfahrungen mit der technischen Durchführung einer Monte-Carlo-Vorhersage und der Bestimmung der stationären Statistiken zu sammeln, was sicherlich auch für eine periodische Zirkulationsform möglich ist.

Zunächst wird die SV bei $Ro_T^* = 0.017$ betrachtet. Für diesen festen Zustand des äußeren Systems wird eine Monte-Carlo-Vorhersage durchgeführt. Nach der in Abschnitt 1.3. angegebenen Methode werden die stationären Statistiken bestimmt, wobei eine beste Approximation im Sinne von Abschnitt 1.3. ausgewählt wird. Sodann werden solche besten Approximationen auch für $Ro_T^* = 0.015, 0.016$ und 0.018 berechnet. Die so bestimmten stationären Klimate werden zur Verifizierung des zeitunabhängigen SD-Modelles (siehe Kapitel 5) herangezogen.

4.1. Ausführung der Monte-Carlo-Vorhersage

Die Vorgabe eines Anfangsensembles ist gleichbedeutend mit der Vorgabe einer multivariaten Wahrscheinlichkeitsdichtenverteilung für den Zustand des inneren Systems zum Anfangszeitpunkt $t = t_0$ der numerischen Integration. Im Gegensatz zur kurzfristigen statistischen Vorhersage, (EPSTEIN 1969) wo man sich das Anfangsensemble durch Beobachtungsfehler zustandegekommen denkt, und für

diese ein Normalverteilungsgesetz annimmt, kann das Anfangsensemble hier durch eine multivariate Gleichverteilung festgelegt werden.

Die Auswahl der Komponenten jedes einzelnen Ensemblepunktes erfolgt durch einen numerischen Zufallsgenerator ¹⁾, der gleichverteilte reelle Zahlen innerhalb eines für jede Komponente vorzuschreibenden Intervalles erzeugt. Dies bedeutet, daß die das Anfangsensemble darstellende endliche Punktwolke durch einen 12-dimensionalen Hyperquader im inneren Phasenraum eingeschlossen ist. Bei Festlegung der begrenzenden Intervalle für die einzelnen Komponenten wurde versucht, dem bei den deterministischen Vorhersagen (vergl. Kapitel 3) praktizierten Prinzip der Überlagerung kleiner Störungen auf eine etablierte Hadleyzirkulation Rechnung zu tragen. Deshalb wurden die Begrenzungsintervalle für die Grundströmungsamplituden vom 1. Mode in geeigneter Weise um die Gleichgewichtswerte der stationären Hadleyzirkulation (nach (3.1a,b)) zentriert, die Intervalle für die übrigen spektralen Amplituden entsprechend um den Wert 0.0.

Aufgrund der Untersuchungen in Kapitel 3. wird eine Vorhersagezeit von 250 Tagen für die Monte-Carlo-Vorhersage als ausreichend angesehen. Die zur Verfügung stehende Rechenkapazität ermöglicht dann eine Ensemblegröße von $M = 220$. Das Anfangsensemble besteht damit aus 220, wie oben beschrieben bestimmten Punkten im inneren Phasenraum. Jeder dieser Punkte dient als Anfangsbedingung für eine deterministische Vorhersage, die nach der in Kapitel 3 beschriebenen Methode durchgeführt wurde. Die dabei berechneten Zeitreihen wurden auf Magnetband gespeichert. Nach Durchführung dieser 220 deterministischen Vorhersagen wurden für jeden Speicherzeitpunkt die den mittleren Zustand des inneren Systems festlegenden Statistiken berechnet. Dies sind die ersten, zweiten und dritten Momente nach (1.4a-c). Da die Anzahl der Momente aus n Variablen vom Grade m $\binom{n+m-1}{m}$ beträgt, mußten 12 erste und 78 zweite Momente bestimmt werden.

1) Hier wurde die SSP-Subroutine RANDU von IBM benutzt

Von den insgesamt 364 dritten Momenten wurde nur eine repräsentative Auswahl berechnet.

4.2. Diskussion der Monte-Carlo-Vorhersage für $Ro_T^* = 0.017$

In Abbildung 4-1 ist der zeitliche Verlauf von 3 zweiten Momenten dargestellt. Es handelt sich um die Varianz der ψ -Störungsamplituden vom 2. Mode $\langle \psi_4' \psi_4' \rangle$, die Varianz der ψ -Grundströmungsamplituden vom 2. Mode $\langle \psi_2' \psi_2' \rangle$, sowie um die Kovarianz zwischen den ψ - und ϵ -Störungsamplituden vom 1. Mode $\langle \psi_5' \epsilon_3' \rangle$. Man erkennt deutlich, daß die Ensemblegröße $M = 220$ hier nicht ausreicht, um - im gewählten Abbildungsmaßstab - einen 'glatten' Verlauf der Statistiken zu erzielen. Vielmehr sind einem klar feststellbaren Trend kurzperiodische Schwankungen überlagert, wobei die vorherrschende Periode für $\langle \psi_2' \psi_2' \rangle$ etwa 13 Tage, für $\langle \psi_4' \psi_4' \rangle$ und $\langle \psi_5' \epsilon_3' \rangle$ 4 bis 5 Tage beträgt. Diese Schwankungen finden also in einer Zeitskala statt, welche kaum mit 'Klima' in Zusammenhang gebracht werden kann. Sie stellen das in Abschnitt 1.3. bereits erwähnte Rauschen dar. Man kann beobachten, daß nach einer nicht-periodischen Phase während der ersten 100 Tage dieses Rauschen im folgenden Integrationszeitraum einen periodischen Verlauf annimmt.

Anhand der in Kapitel 3. erarbeiteten Kenntnisse über das Verhalten des inneren Systems während einzelner deterministischer Vorhersagen kann auch das Verhalten der Statistiken relativ leicht erklärt werden. Dies soll am Beispiel von $\langle \psi_2' \psi_2' \rangle$ deutlich gemacht werden. In 3.3.3. wurde die Zirkulationsform des Modelles für $Ro_T^* = 0.017$ als symmetrische Vacillation identifiziert. Das Erscheinungsbild dieser Zirkulationsform ist im Prinzip in Abbildung 3-3 dargestellt es treten lediglich andere Amplituden und Perioden auf. Wesentlich ist jedenfalls, daß nach einer gewissen Relaxationszeit das Verhalten des inneren Systems periodisch wird. Damit kann aber ψ_2 durch eine harmonische Funktion der Zeit approximiert werden. Die Periode beträgt 25.3 d, die Amplitude sei $|\psi_2|_{\max}$. Nach den trigonometrischen Gesetzen setzt sich dann ψ_2^2 aus einem zeitlich konstanten Anteil der Größe $1/2 |\psi_2|_{\max}^2$ mit überlagerter harmonischer Welle der Periode $25.3/2 = 12.6$ d

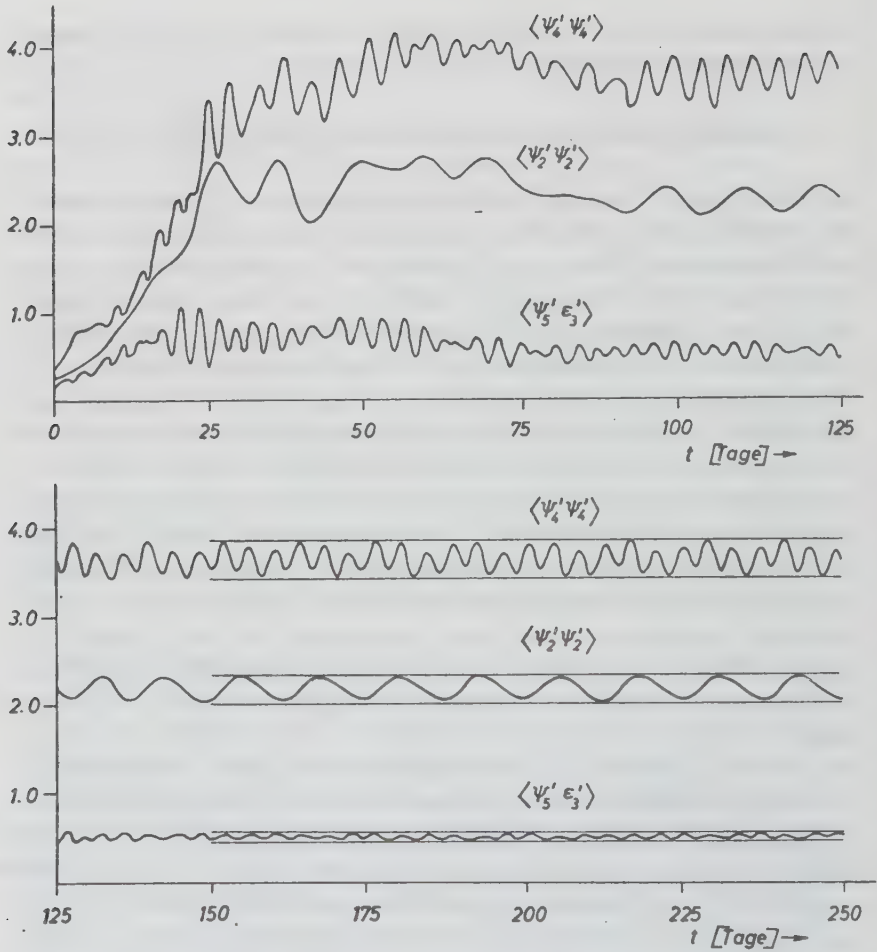


Abb. 4-1: Monte-Carlo-Vorhersage ($M = 220$).

Dargestellt sind die zweiten Momente $\langle \psi'_2 \psi'_2 \rangle$, $\langle \psi'_4 \psi'_4 \rangle$ und $\langle \psi'_5 \epsilon'_3 \rangle$ in $10^{-6} L^4 f_0^2$ -Einheiten. Berechnung der stationären Statistiken im Intervall vom 150. bis zum 250. Tag.

$$Ro_T = 0.017$$

zusammen, wobei die Extrema bei 0. und $|\psi_2|_{\max}^2$ liegen. Dies gilt für jede einzelne der 220 deterministischen Vorhersagen, die einzelnen ψ_2^2 -Wellen unterscheiden sich nur durch ihre Phasenlagen, wobei angenommen werden kann, daß diese zeitlich konstant und zufällig im Intervall $(0, 2\pi)$ verteilt sind. Dasselbe gilt offensichtlich auch für die ψ -Wellen selbst. Bei der Berechnung von $\langle \psi_2^2 \rangle$ nach (1.4b) mit Hilfe des Ensemblemittelungsoperators (1.2) erweist sich dieser als Filter (Additionsgesetze der Trigonometrie), der die Oszillationsamplitude von $\langle \psi_2^2 \rangle$ gegenüber den einzelnen ψ_2^2 Amplituden reduziert, während die Periode (13 Tage!), sowie der zeitlich konstante Mittelwert unverändert bleiben. Eine totale Auslöschung würde genau dann eintreten, wenn zu jedem Phasenwinkel ein um $\pm\pi$ verschobener existiert. Die Annahme zufällig verteilter Phasenwinkel läßt es plausibel erscheinen, daß die durch den Filter (1.2) bewirkte Dämpfung um so stärker ist, je größer die Ensemblegröße M gewählt wurde. Im Falle eines nicht reinperiodischen Verhaltens des inneren Systems braucht man nur eine zeitliche Fourieranalyse der einzelnen spektralen Amplituden vorzunehmen. Die vorstehenden Überlegungen können dann auf jede einzelne Fourierkomponente angewandt werden.

4.3. Diskussion des stationären Klimas

Entsprechend den Vorschlägen von 1.3. muß ein geeignetes Zeitintervall zur Berechnung der arithmetischen Mittel $\tilde{\alpha}_1$ ausgewählt werden. Im vorliegenden Fall (Abbildung 4-1) wird der Bereich gewählt, in dem das Rauschen erkennbar periodisch verläuft. Als geeignetes Bezugsintervall wurde der Zeitraum vom 150. bis zum 250. Tag verwandt. Als Schranken werden die maximalen Abweichungen der Statistiken von den arithmetischen Mitteln gewählt. Betrachtet man wiederum als Beispiel die Varianz $\langle \psi_2^2 \rangle$, so beträgt die maximale Abweichung der Varianz $\langle \psi_2^2 \rangle$, von ihrem Mittelwert innerhalb des Bezugsintervalles $0.137 \cdot 10^{-6} L^4 f_0^2$ - Einheiten. Die aus einer deterministischen Vorhersage berechnete maximale Abweichung der Größe ψ_2^2 von ihrem Mittelwert innerhalb des Intervalls vom 150. bis zum 250. Tag beträgt dagegen

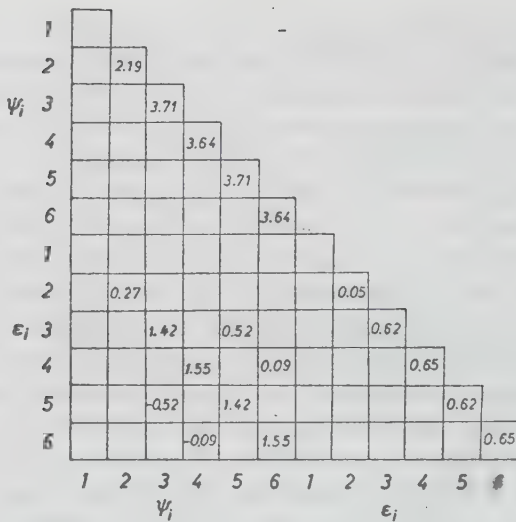


Abb. 4-2: Übersicht der stationären zweiten Momente.

Ensemblegröße $M = 220$; $Ro_T = 0.017$.

$10^{-6} L^4 f_0^2$ -Einheiten.

$2.436 \cdot 10^{-6} L^4 f_0^2$ - Einheiten, ist also um den Faktor 20 größer als die oben verwendete Schranke. Damit können die hier verwendeten Schranken im Sinne von Abschnitt 1.3. als sinnvoll bezeichnet werden. Die sich aus den Schranken nach (1.3b) ergebenden Begrenzungen für das Rauschen der Statistiken sind in der Abbildung 4-1 durch Geraden angedeutet. Man erkennt deutlich, daß diese Prozedur sinnvoll ist, die arithmetischen Mittel können als stationäre Statistiken bezeichnet werden und definieren das stationäre Klima. In der folgenden qualitativen Diskussion wird zur Abkürzung der Zusatz 'stationär' sowie die Tilde weggelassen.

Von den 12 ersten Momenten, d.h. den Erwartungswerten der spektralen Variablen ψ_i und ϵ_i , sind nur $\langle \psi_1 \rangle$ und $\langle \epsilon_1 \rangle$ nicht vernachlässigbar klein. Die nicht verschwindenden zweiten Momente sind in der Abbildung 4-2 dargestellt. In Bezug auf die dritten

Momente sei nur erwähnt, daß lediglich 32 aus 364 eine Rolle spielen.

Das stationäre Klima für $Ro_T^* = 0.017$ entspricht einer einfachen Hadleyzelle. Die Isothermen in 500 mb sind parallel zur x_O -Achse und die y_O -Variation von $\langle T_2 \rangle$ ist proportional zu $\cos y_O$. Der meridionale Temperaturgradient bezogen auf die gesamte Kanalbreite (10 000 km) hat sich jedoch von 32.8 K für die stationäre Hadleyzelle auf 31.0 K vermindert. Damit verbunden ist wegen der thermischen Windgleichung (2.8) eine Abnahme des maximalen geostrophischen Zonalwindes in 250 mb von 21.9 ms^{-1} auf 20.7 ms^{-1} ; in 750 mb von 7.3 ms^{-1} auf 6.9 ms^{-1} . Nach (2.3b) bedeutet dies verschwindenden Bodenwind. Die Windprofile in beiden Niveaus sind proportional zu $\sin y_O$, womit der Jet im oberen Niveau genau in der Kanalmitte liegt. Wie bei einem quasi-geostrophischen Modell ohne x-abhängige Zwangsfunktionen zu erwarten, ist das Ensemblemittel der Meridionalzirkulation rein ageostrophisch bedingt. Entsprechend der Zirkulation in einer Hadleyzelle beobachtet man eine aufwärtsgerichtete Bewegung in der südlichen Kanalhälfte, Südwind im oberen Niveau, abwärtsgerichtete Bewegungen im Norden und Nordwind im unteren Niveau. Diese durch die nichtadiabatischen Prozesse erzwungene Zirkulation ist jedoch durch die Divergenz eines Transportes fühlbarer Wärme nach Norden durch die Störungen gegenüber der HZ vermindert.

Eine eingehendere Diskussion ist möglich, wenn man die Bilanzgleichungen für die Erwartungswerte der vertikal gemittelten Vorticity $\langle \bar{\zeta}_g \rangle$, der thermischen Vorticity $\langle \hat{\zeta}_g \rangle$ und der Temperatur $\langle T_2 \rangle$ betrachtet. Die spektrale Gestalt dieser Gleichungen erhält man durch Anwendung des Ensemblemittelungsoperators ' $\langle \rangle$ ' auf (2.12a,b) wobei die Gleichung (2.12b) in ihre beiden Bestandteile aufzuspalten ist.

Die in diesen Gleichungen auftretenden spektralen Komponenten der Transportdivergenzen (siehe Abschnitt 2.4.) haben folgende Gestalt:

$$\langle \underline{v} \cdot (\underline{\bar{v}}_g \underline{\bar{c}}_g + \underline{\hat{v}}_g \underline{\hat{c}}_g) \rangle_i = \sum_{j,k=1}^6 (a_j^2 - a_k^2) c_{ijk} (\langle \psi_j \rangle \langle \psi_k \rangle + \langle \psi_j' \psi_k' \rangle + \langle \epsilon_j \rangle \langle \epsilon_k \rangle + \langle \epsilon_j' \epsilon_k' \rangle)$$

$$\langle \underline{v} \cdot (\underline{\bar{v}}_g \underline{\hat{c}}_g + \underline{\hat{v}}_g \underline{\bar{c}}_g) \rangle_i = \sum_{j,k=1}^6 (a_j^2 - a_k^2) c_{ijk} (\langle \psi_j \rangle \langle \epsilon_k \rangle + \langle \psi_j' \epsilon_k' \rangle + \langle \psi_k \rangle \langle \epsilon_j \rangle + \langle \psi_k' \epsilon_j' \rangle)$$

$$\langle \underline{v} \cdot (T_2 \underline{\bar{v}}_g) \rangle_i = \sum_{j,k=1}^6 c_{ijk} (\langle \psi_k \rangle \langle \epsilon_j \rangle + \langle \psi_k' \epsilon_j' \rangle - \langle \psi_j \rangle \langle \epsilon_k \rangle - \langle \psi_j' \epsilon_k' \rangle)$$

$\langle \rangle_i$ bedeutet dabei den in der Bilanzgleichung für die i-te spektrale Komponente der oben erwähnten Größen auftretenden Anteil der Transportdivergenzen. Da von den ersten Momenten nur $\langle \psi \rangle$ und $\langle \epsilon \rangle$ nicht vernachlässigbar sind, sind wegen der Struktur der c_{ijk} unter der Doppelsumme auftretende Produkte von ersten Momenten alle vernachlässigbar klein. In den Bilanzgleichungen können also nur zweite Momente einen Beitrag zu den Transportdivergenzen leisten. Ein Vergleich zwischen dem, aufgrund der Wechselwirkungskoeffizienten möglichen, mit den, in Abb. 4-2 angegebenen, zweiten Momenten zeigt, daß die Divergenzen der Vorticitytransporte (in den Bilanzgleichungen für $\langle \bar{c}_g \rangle$ und $\langle \hat{c}_g \rangle$) in allen spektralen Komponenten verschwinden. Von der Divergenz des Temperaturtransportes bleibt lediglich der in der Bilanzgleichung für $\langle \epsilon \rangle$ auftretende Term $c_{135} (\langle \psi_5' \epsilon_3' \rangle - \langle \psi_3' \epsilon_5' \rangle) + c_{146} (\langle \psi_6' \epsilon_4' \rangle - \langle \psi_4' \epsilon_6' \rangle)$ übrig. Dieser Term allein bewirkt den Unterschied des hier berechneten stationären Klimas von einer bei gleichem äußeren System bestimmten stationären Hadleyzelle.

Die klimatologische Bedeutung der bisher noch nicht erwähnten zweiten Momente in Abb. 4-2 kann nur anhand der Bilanzgleichungen für die kinetische und verfügbare potentielle Energie des Modells diskutiert werden. Darauf wird hier verzichtet. Es sei lediglich

erwähnt, daß $\langle \psi_3' \psi_3' \rangle$ ein Maß für das Ensemblemittel der kinetischen Energie der Störungen vom 1. Mode, $\langle \psi_4' \psi_4' \rangle$ ein solches bezogen auf die Störungen vom 2. Mode ist. Allgemein zeigt sich, daß alle möglichen Varianzen mit Ausnahme der des 1. Modes der Grundströmung auftreten. Demgegenüber sind die Kovarianzen, abgesehen von den bereits erwähnten, auf eine Nebendiagonale in Abb. 4-2 beschränkt und dadurch charakterisiert, daß sie nur Korrelationen zwischen gleichen spektralen Ordnungszahlen darstellen. Die in Abb. 4-2 erkennbaren Identitäten hängen eng mit der Definition der Orthogonalfunktionen (2.12) ($\sin x_0$, bzw. $\cos x_0$) zusammen. Es sei vorweggenommen, daß das in Abb. 4-2 gegebene Besetzungsschema für die zweiten Momente für den gesamten Bereich der symmetrischen Vacillation charakteristisch ist.

4.4. Abhängigkeit der stationären Statistiken von der Ensemblegröße

Das mit der Ensemblegröße 220 berechnete stationäre Klima soll als beste Approximation im Sinne von Abschnitt 1.3. verstanden werden. Aus Kostengründen kann jedoch bei umfangreicheren Untersuchungen (z.B. Bestimmung der Abhängigkeit stationärer Klimate vom äußeren System.) diese Ensemblegröße nicht beibehalten werden. Hier wird nun der Fehler diskutiert, der mit stationären Klimaten verbunden ist, die aus kleineren Ensembles bestimmt werden. Mit Hilfe des bereits erwähnten Zufallsgenerators wurden aus dem gespeicherten Ensemble der Größe 220 Teilensembles der Größen 10, 60 und 120 ausgewählt. Die stationären Statistiken wurden dann über das Intervall vom 150. bis zum 250. Tag berechnet. In Tabelle 4-1 sind in Spalte 1 eine Auswahl der hier als beste Approximation betrachteten stationären Statistiken der Ensemblegröße 220 angegeben. In den folgenden Spalten stehen die relativen Abweichungen der aus den einzelnen Teilensembles bestimmten stationären Statistiken von der besten Approximation.

Ensemble-

größe:	220	120	60	10
$\langle \psi_1 \rangle$	$3.0887 \cdot 10^{-2}$	0.01	0.01	0.01
$\langle \psi_2 \rangle$	0.0001 "	0.01	0.01	0.01
$\langle \psi_2 \psi_2 \rangle$	$2.1931 \cdot 10^{-6}$	-0.33	-1.14	-0.69
$\langle \psi_3 \psi_3 \rangle$	3.7086 "	-0.57	-2.11	-28.13
$\langle \psi_4 \psi_4 \rangle$	3.6369 "	0.29	0.31	-2.83
$\langle \psi_5 \epsilon_3 \rangle$	0.5178 "	-0.54	-2.22	-28.68
$\langle \psi_6 \epsilon_4 \rangle$	0.0895 "	0.22	-1.23	-4.92
$\langle \psi_2 \psi_3 \psi_4 \rangle$	$3.0322 \cdot 10^{-9}$	-0.78	-3.49	-40.57

Tab. 4-1: Spalte 1: Stationäre Statistiken (Ensemblegröße 220).

Spalten 2-4: Relative Abweichung von Spalte 1 (%).

Erste Momente in $L^2 f_o$ -Einheiten, zweite Momente in $L^4 f_o^2$ -Einheiten, dritte Momente in $L^6 f_o^3$ -Einheiten.

$$Ro_T^* = 0.017$$

Ensemble-

größe:	10	60	120	220
$\langle \psi_1 \rangle$	$0.00004 \cdot 10^{-2}$	0.00002	0.00002	0.00001
$\langle \psi_2 \rangle$	0.0260 "	0.0280	0.0218	0.0184
$\langle \psi_2 \psi_2 \rangle$	$0.4461 \cdot 10^{-6}$	0.1874	0.1811	0.1377
$\langle \psi_3 \psi_3 \rangle$	0.8913 "	0.5498	0.4084	0.1493
$\langle \psi_4 \psi_4 \rangle$	1.6802 "	0.7298	0.4806	0.2175
$\langle \psi_5 \epsilon_3 \rangle$	0.2678 "	0.2051	0.1443	0.0435
$\langle \psi_6 \epsilon_4 \rangle$	0.6477 "	0.2879	0.1849	0.0732
$\langle \psi_2 \psi_3 \psi_4 \rangle$	$1.7000 \cdot 10^{-9}$	1.1374	0.8627	0.3566

Tab. 4-2: Abhängigkeit der Schranken s_1 von der Ensemblegröße.

Dimensionen wie Tab. 4-1.

$$Ro_T^* = 0.017$$

Wie man sehen kann, werden die stationären Statistiken um so weniger von der Ensemblegröße beeinflusst, je niedriger ihr Grad ist. Die Unempfindlichkeit der Erwartungswerte $\langle \psi_1 \rangle$ und $\langle \psi_2 \rangle$ gegenüber Änderungen der Ensemblegröße ist vor allem darauf zurückzuführen, daß zu ihrer Berechnung keine spektralen Multiplikationen notwendig sind. Überdies ist $\langle \psi_1 \rangle$ bei einer deterministischen Vorhersage im betrachteten Intervall nahezu konstant. Demgegenüber zeigen die dritten Momente, die durch 2 spektrale Multiplikationen zustande kommen, die stärkste Abhängigkeit von der Ensemblegröße.

Für eine Monte-Carlo-Vorhersage mit möglichst niedriger Ensemblegröße muß also berücksichtigt werden, wie hoch der Grad der Momente ist, an denen man noch interessiert ist. Will man z.B. nur die Erwartungswerte berechnen, so genügt im vorliegenden Fall die Ensemblegröße 10. Sollen dagegen auch die zweiten Momente bestimmt werden, so sind bei einer Ensemblegröße 10 Fehler bis zu 30 % möglich, was evtl. unerwünscht ist. Eine Versechsfachung der Ensemblegröße auf 60 drückt dagegen die möglichen Fehler bei den zweiten Momenten unter 2,5 %, womit schon eine beträchtliche Genauigkeit erreicht ist. Die Ergebnisse für den Fall 120 weichen schließlich kaum noch ($\leq 0,5$ %) von den Werten für das Gesamtensemble der Größe 220 ab. Wenn man auch an den dritten Momenten interessiert ist, für diese jedoch einen relativen Fehler von ca. 5 % akzeptiert, würde eine vernünftige Ensemblegröße hier bei ca. 50 liegen.

Zur Demonstration der glättenden Wirkung des Ensemblemittelungsoperators sind in Tabelle 4-2 die bei der Berechnung der stationären Statistiken erforderlichen Schranken s_1 in Abhängigkeit von der Ensemblegröße angegeben. Diese können als Maß für die Rauschamplituden der Statistiken angesehen werden. Während das Rauschen bei $\langle \psi_1 \rangle$ vernachlässigbar klein ist, hängt es bei $\langle \psi_2 \rangle$ nur mäßig von der Ensemblegröße ab. Bei den zweiten und dritten Momenten

kommt dagegen die Filterwirkung des Ensemblemittelungsoperators viel stärker zum Tragen.

4.5. Stationäre Klimate für $Ro_T^* = 0.015, 0.016$ und 0.018

Für jede dieser thermischen Rossbyzahlen wurde bei festem äußeren System eine Monte-Carlo-Vorhersage der Ensemblegröße 60 in der eingangs beschriebenen Art durchgeführt. Die Ergebnisse dieser Versuche, zusammen mit den bereits bekannten Ergebnissen, für $Ro_T^* = 0.017$ sind in der Tabelle 4-3 zusammengestellt. Sie soll einen Eindruck von der Abhängigkeit der stationären Statistiken vom äußeren System vermitteln.

Die Grundtendenz ist eine Zunahme der dargestellten Statistiken mit wachsender thermischer Rossbyzahl. Eine Ausnahme hiervon bildet lediglich die Varianz $\langle \psi_3' \psi_3' \rangle$. Das Verhalten von $\langle \psi_1 \rangle$ erklärt sich aus der sehr starken Kopplung zwischen der thermischen Rossbyzahl und den Grundströmungsamplituden. Betrachtet man nun die Varianzen $\langle \psi_3' \psi_3' \rangle$ und $\langle \psi_4' \psi_4' \rangle$, so können diese - wie erwähnt - als Maß für die kinetische Energie der Störungen vom 1. bzw. 2. Mode angesehen werden. $Ro_T^* = 0.015$ liegt im Bereich der RZ1, wo definitionsgemäß keine Störungen im 2. Mode auftreten. Deshalb ist auch $\langle \psi_4' \psi_4' \rangle$ für $Ro_T^* = 0.015$ gleich Null. Das stationäre Klima für die RZ1 ist durch das Fehlen von dritten Momenten (Momente vom 2. Mode) gekennzeichnet. Mit $Ro_T^* = 0.016$ befinden wir uns aber bereits im Bereich der SV (vergl. Abb. 3-5), hier treten sowohl dritte Momente als auch zweite Momente vom 2. Mode auf. Mit zunehmender thermischer Rossbyzahl verlagert sich die kinetische Energie der Störungen vom 1. auf den 2. Mode, was in der Abnahme von $\langle \psi_3' \psi_3' \rangle$ und der Zunahme von $\langle \psi_4' \psi_4' \rangle$ zum Ausdruck kommt. Dieses Verhalten wird plausibel, wenn man beachtet (vergl. Abb. 3-5), daß für hohe thermische Rossbyzahlen in Kap. 3 die RZ2 als Zirkulationsform gefunden wurde. Interessant ist das Verhalten von $\langle \psi_5' \psi_3' \rangle$, einem Maß für den Beitrag, welche die Wellen vom 1. Mode zur Divergenz des Temperaturtransportes leisten. Trotz-

Ro_T	0.015	0.016	0.017	0.018
$\langle \psi_1 \rangle$	2.7541 10^{-2}	2.9326	3.0887	3.2352
$\langle \psi_2 \rangle$	0.0 "	-0.0001	0.0001	-0.0003
$\langle \psi_2 \psi_2 \rangle$	0.0 10^{-6}	1.3512	2.1682	2.7320
$\langle \psi_3 \psi_3 \rangle$	5.3887 "	4.0664	3.6303	3.3396
$\langle \psi_4 \psi_4 \rangle$	0.0 "	1.7449	3.6480	6.2052
$\langle \psi_5 \epsilon_3 \rangle$	0.4221 "	0.4635	0.5063	0.5327
$\langle \psi_6 \epsilon_4 \rangle$	0.0 "	0.0064	0.0884	0.2650
$\langle \psi_2 \psi_3 \psi_4 \rangle$	0.0 10^{-9}	1.9712	2.9265	3.8705

Tab. 4-3: Abhängigkeit der stationären Statistiken von Ro_T ,
berechnet aus Monte-Carlo-Vorhersagen der Ensemble-
größe 60. Dimensionen wie Tab. 4-1.

dem die Intensität dieser Wellen abnimmt, wächst $\langle \psi_{53}' \epsilon' \rangle$ mit zunehmender thermischer Rossbyzahl an. Nun ist $\langle \psi_{53}' \epsilon' \rangle$ durch die gegenseitige zeitliche Phasenlage von ψ_5 und ϵ_3 bei den 60, zu einer Monte-Carlo-Vorhersage zusammengefaßten, deterministischen Vorhersagen bedingt. Das Verhalten von $\langle \psi_{53}' \epsilon' \rangle$ kann also nur durch eine Änderung dieser Phasenlage mit zunehmender thermischer Rossbyzahl erklärt werden. Der Beitrag den die Wellen vom 2. Mode zur Divergenz des Temperaturtransportes leisten ($\langle \psi_{64}' \epsilon' \rangle$) ist dagegen vernachlässigbar klein.

4.6. Zusammenfassung der Ergebnisse

Wie gezeigt werden konnte, ist der Verlauf der Statistiken als Ergebnis einer Monte-Carlo-Vorhersage immer von einem Rauschen überlagert, wobei die Rauschamplitude mit zunehmender Ensemblegröße abnimmt. Daher erwies sich die Klimadefinition von 1.3 als sinnvoll. Nach der Bestimmung einer besten Approximation wurde eine Abschätzung über die mit niedrigen Ensemblegrößen verbundenen Fehler getroffen. Hinsichtlich dieser Fehler wurde eine Ensemblegröße von 60 als akzeptabel empfunden. Diese Ensemblegröße fand bei der Bestimmung stationärer Klimate an anderen Punkten des äußeren Systems Verwendung.

Die Berechnung der stationären Statistiken für den Fall der SV ergab, daß insgesamt nur zwei erste Momente und 19 zweite Momente nicht vernachlässigbare Werte besitzen. Überdies treten bei den zweiten Momenten charakteristische Symmetriebeziehungen auf, wodurch sich ihre Zahl weiter verringern läßt. Dies ist ein wichtiges Ergebnis, vor allem im Hinblick auf die erforderliche Variablenzahl des stationären SD-Modells. Ferner zeigte sich, daß die dritten Momente bei der RZ1 keine Rolle spielen, was für die Schließung des SD-Modells (siehe Abschnitt 1.4.) von Bedeutung ist.

5. Klimauntersuchungen mit dem stationären SD-Modell

Als Alternative zu den im vorigen Kapitel berechneten stationären Klimaten werden in diesem Kapitel Approximationen an das Klima der Modellatmosphäre bei festem äußeren System mit einem stationären SD-Modell berechnet. Entsprechend der in Abschnitt 1.4. aufgestellten Terminologie heißen diese Approximationen stationäre Zustände. Das stationäre SD-Modell wird zunächst für zwei feste Zustände des äußeren Systems gelöst, die mit den Zirkulationsformen Rossbyzirkulation und symmetrische Vacillation verbunden sind. Sodann wird im Hinblick auf die Berechnung quasistationärer Klimaänderungen (vergl. Abschnitt 1.5.) die Abhängigkeit der stationären Zustände vom äußeren System bestimmt.

5.1. Das stationäre SD-Modell

Da eine explizite Niederschrift der Modellgleichungen zuviel Raum beanspruchen würde, wird lediglich das zum Aufstellen der Gleichungen verwendete Verfahren angegeben. Das Schließungsproblem wird jedoch ausführlich diskutiert.

5.1.1. Die stationären Momentengleichungen

Unter Verwendung von (1.4a-c) folgen aus (2.12a,b) bei Schließung auf der 2. Stufe folgende fünf Typen von Momentengleichungen:

$$(5.1a) \quad \frac{d}{dt} \langle \psi_i \rangle = RSa, \quad i = 1, 2, \dots, 6$$

$$(5.1b) \quad \frac{d}{dt} \langle \epsilon_i \rangle = RSb, \quad i = 1, 2, \dots, 6$$

$$(5.1c) \quad \frac{d}{dt} \langle \psi_m \psi_n \rangle^{1)} = RSc, \quad n \leq m = 1, 2, \dots, 6$$

$$(5.1d) \quad \frac{d}{dt} \langle \epsilon_m \epsilon_n \rangle^{1)} = RSe, \quad n \leq m = 1, 2, \dots, 6$$

$$(5.1e) \quad \frac{d}{dt} \langle \psi_m \epsilon_n \rangle^{1)} = RSe, \quad n, m = 1, 2, \dots, 6$$

1) Vergl. Fußnote auf der nächsten Seite.

Dabei bedeuten $RSa, \dots, RSe$ die rechten Seiten der Momentengleichungen. Der allgemeine Typ der Gleichungen (5.1a,b) ist durch (1.5a), der von (5.1c-e) durch (1.5b) gegeben. Als Beispiel wird nur die explizite Gestalt von (5.1c) hingeschrieben:

$$\begin{aligned}
 (5.1c) \quad \frac{1}{f_0} \frac{d}{dt} \langle \psi_m \psi_n \rangle = & \sum_{j=1}^6 \sum_{k=1}^6 \left\{ c_{njk} \frac{a_j^2 - a_k^2}{a_n^2} (\langle \psi_j \rangle \langle \psi_m \psi_k \rangle + \langle \psi_k \rangle \langle \psi_m \psi_j \rangle + \right. \\
 & + \langle \psi_m \psi_j \psi_k \rangle + \langle \epsilon_j \rangle \langle \psi_m \epsilon_k \rangle + \langle \epsilon_k \rangle \langle \psi_m \epsilon_j \rangle + \langle \psi_m \epsilon_j \epsilon_k \rangle) + \\
 & + c_{mjk} \frac{a_j^2 - a_k^2}{a_m^2} (\langle \psi_j \rangle \langle \psi_n \psi_k \rangle + \langle \psi_k \rangle \langle \psi_n \psi_j \rangle + \\
 & + \langle \psi_n \psi_j \psi_k \rangle + \langle \epsilon_j \rangle \langle \psi_n \epsilon_k \rangle + \langle \epsilon_k \rangle \langle \psi_n \epsilon_j \rangle + \langle \psi_n \epsilon_j \epsilon_k \rangle) \Big\} + \\
 & + B \sum_{j=1}^6 \left(\frac{b_{nj}}{a_n^2} \langle \psi_j \psi_m \rangle + \frac{b_{mj}}{a_m^2} \langle \psi_j \psi_n \rangle \right) - \\
 & - K (2 \langle \psi_n \psi_m \rangle - 2 (\langle \psi_n \epsilon_m \rangle + \langle \psi_m \epsilon_n \rangle)) \quad . \quad 1)
 \end{aligned}$$

Durch Nullsetzen der Zeitableitungen in (5.1a-e) erhält man ein System von 90 nichtlinearen algebraischen Gleichungen, gegeben durch:

$$(5.2a) \quad RSa = 0,$$

$$(5.2b) \quad RSb = 0,$$

$$(5.2c) \quad RSc = 0,$$

$$(5.2d) \quad RSd = 0,$$

$$(5.2e) \quad RSe = 0.$$

Wegen der unter den Doppelsummen von (5.1c-e) auftretenden dritten Momente ist das System (5.2a-e) nicht geschlossen. Schließungsvorschläge, sowie die Möglichkeit einer Verringerung der Gleichungszahl werden in den folgenden Abschnitten diskutiert.

1) Wo keine Verwechslungen möglich sind, wird im folgenden auf eine besondere Kennzeichnung der zweiten und dritten Momente als zentrierte Momente verzichtet.

5.1.2. Das Schließungsproblem

Nach dem Wissen des Autors existiert kein spektrales stationäres SD-Modell mit Schließung auf der 2. Stufe. An zeitabhängigen SD-Modellen wären nur die von EPSTEIN (1969) und FLEMING (1971) zu nennen. Beide Autoren schließen auf der 2. Stufe durch Nullsetzen der dritten Momente. Es handelt sich dabei jedoch um kurzfristige stochastisch-dynamische Vorhersagen und nicht um die Erforschung des Klimas. Daher ist es sicherlich angebracht, das Schließungsproblem für das vorliegende SD-Modell eingehend zu diskutieren, wobei auch der Zustand des äußeren Systems zu berücksichtigen ist.

5.1.2.1. Hadleyzirkulation

Soll das stationäre SD-Modell für eine aufgeprägte thermische Rossbyzahl gelöst werden für welche in Kap. 3 eine HZ gefunden wurde, so besteht die Schließung im Nullsetzen aller zweiten und dritten Momente in (5.2a-e). Damit werden die Gleichungen (5.2c-e) aber trivial und können weggelassen werden. In den verbleibenden Gleichungen (5.2a,b) können aber nach Abschnitt 3.1. auch alle Erwartungswerte mit Indizes $\neq 1$ gestrichen werden. Das stationäre SD-Modell wird damit auf die Gleichungen der stationären Hadleyzirkulation (3.1a,b) reduziert und kann nun analytisch gelöst werden.

5.1.2.2. Rossbyzirkulation (RZ1)

Zur Schließung können die Ergebnisse von Abschnitt 4.5. herangezogen werden. Dort wurde festgestellt, daß für die RZ1 keine dritten Momente auftreten. Die Schließung besteht somit im Nullsetzen der dritten Momente in den Gleichungen (5.2c-e); sie ist exakt. Wie das Beispiel (5.1c) zeigt, bleibt das Modell mit dieser Schließung nichtlinear und kann nur mit numerischen Methoden iterativ gelöst werden.

5.1.2.3. Symmetrische Vacillation

Die Ergebnisse von Kapitel 4 weisen darauf hin, daß bei der SV die dritten Momente eine Rolle spielen. Die Erfolgsaussichten einer Schließung durch Nullsetzen der dritten Momente lassen sich anhand der Gleichung (5.1c) für $m = n = 2$, d.h. der Momentengleichung für die Varianz $\langle \psi_2 \psi_2 \rangle$ abschätzen. Die Terme unter der Doppelsumme auf der rechten Seite von (5.1c) lauten ausgeschrieben (es werden nur solche berücksichtigt, bei denen nur ψ -Amplituden beteiligt sind):

$$\begin{aligned} RSc' = & 2 c_{236} \frac{a_3^2 - a_6^2}{a_2^2} (\langle \psi_3 \rangle \langle \psi_2 \psi_6 \rangle + \langle \psi_6 \rangle \langle \psi_2 \psi_3 \rangle + \langle \psi_2 \psi_3 \psi_6 \rangle) + \\ & + 2 c_{245} \frac{a_4^2 - a_5^2}{a_2^2} (\langle \psi_4 \rangle \langle \psi_2 \psi_5 \rangle + \langle \psi_5 \rangle \langle \psi_2 \psi_4 \rangle + \langle \psi_2 \psi_4 \psi_5 \rangle). \end{aligned}$$

Nullsetzen der dritten Momente reduziert RSc' auf die unterstrichenen Terme, die alle Produkte von einem Erwartungswert und einer Kovarianz sind. Für das mit der SV verbundene stationäre Klima (vergl. Kap. 4, Abb. 4-2) besitzen jedoch alle in Frage kommenden Kovarianzen den stationären Wert Null, dasselbe gilt auch für die Erwartungswerte. Nullsetzen der dritten Momente bedeutet also im stationären Fall $RSc' = 0$. Nun gibt FLEMING (1971) die Energiegleichungen für ein spektrales zeitabhängiges SD-Modell an, die in stationärer Version auch auf unser stationäres SD-Modell übertragbar sind. Damit kann man leicht zeigen, daß RSc' eine wesentliche Rolle beim barotropen Übergang der kinetischen Energie der Grundströmung in die Störungen spielt. Da zu vermuten ist, daß dieser Energieübergang beim stationären Klima auftritt (eine exakte Nachprüfung anhand der Ergebnisse von Kapitel 4 hätte den Rahmen dieser Arbeit gesprengt), dürfte eine Schließung durch Nullsetzen der dritten Momente für die SV nicht in Frage kommen. Vielmehr muß eine Parameterisierung für die dritten Momente gefunden werden.

5.1.3. Parameterisierung der dritten Momente

Die Variablen des stationären SD-Modelles sind bei physikalisch richtiger Schließung sowohl als Mittel über ein unendliches Ensemble (das Klimaensemble von Abschnitt 1.3.) als nach der Ergodenvermutung (vergl.: MONIN und YAGLOM 1971) auch als Mittel über eine unendlich lange Zeitreihe definiert. Damit liegt der Gedanke nahe, sie durch endliche Zeitmittel, gewonnen mit Hilfe einer deterministischen Vorhersage zu approximieren.

Abbildung 5-1 zeigt den Verlauf der drei spektralen Amplituden ψ_2 , ψ_3 und ψ_4 vom 400. bis zum 450. Tag einer deterministischen Vorhersage für $Ro_T^* = 0.017$. Jede einzelne dieser Amplituden läßt sich in guter Näherung durch eine harmonische Funktion der Zeit mit Berücksichtigung nur einer einzigen Frequenz darstellen. Allgemein:

$$X_i(t) = p_{in} \cos(n\Omega t + q_{in}).$$

$n\Omega = n \cdot 2\pi/T_0$ ist die Kreisfrequenz von X_i , bezogen auf eine Periode T_0 , die o.B.d.A. so gewählt werden kann, daß sie ein ganzzahliges Vielfaches aller auftretenden Perioden ist. p_{in} ist die konstante Amplitude und q_{in} die konstante zeitliche Phase von X_i .

Definiert man $\overline{(\quad)}$ als den zeitlichen Mittelwert, bezogen auf T_0 , und führt ein: $X_i = \overline{X_i} + X_i^*$, so gilt wegen $\overline{X_i} = 0$: $X_i = X_i^*$. Damit können die zweiten zentrierten Momente approximiert werden als:

$$\overline{X_j^* X_k^*} = p_{jm} p_{kn} \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \cos(m\Omega t + q_{jm}) \cos(n\Omega t + q_{kn}) dt.$$

Die Entwicklung des Integrals auf der rechten Seite liefert nur dann einen von Null verschiedenen Wert, wenn die Frequenzen von X_j und X_k gleich sind: $m = n$. In diesem Fall folgt:

$$\overline{X_j^* X_k^*} = \frac{1}{2} p_{jm} p_{km} \cos(q_{jm} - q_{km}).$$

Beträge und Vorzeichen der zweiten Momente sind also durch die Phasendifferenz $q_{jm} - q_{km}$ bestimmt. Für Varianzen ($j = k$) gilt speziell:

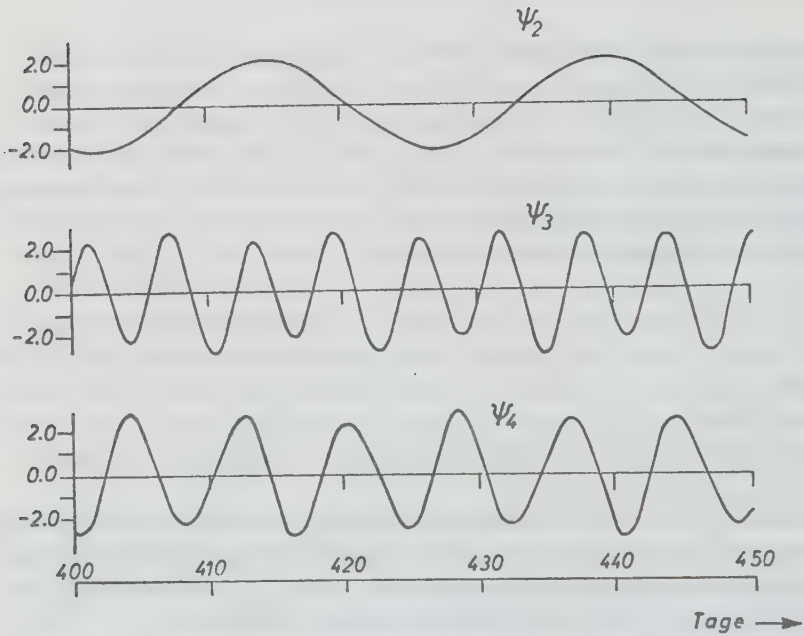


Abb. 5-1: Verlauf von drei spektralen Amplituden in $10^{-3} L^2 f_0$ -Einheiten. Deterministische Vorhersage: $Ro_T^* = 0.017$

$$(5.3) \quad \overline{x_j^* x_j^*} = \frac{1}{2} p_{jm}^2.$$

Auf dieselbe Weise lässt sich auch eine Approximation für die dritten Momente gewinnen. Besitzen die beteiligten spektralen Amplituden etwa die Frequenzen l , m und n (o.B.d.A. $l > m \geq n$), so lautet die Forderung an ein nichtvernachlässigbares drittes Moment: $m + n - l = 0$, und man erhält:

$$(5.4) \quad \overline{x_l^* x_j^* x_k^*} = \frac{1}{4} p_{il} p_{jm} p_{kn} \gamma_{ijk},$$

mit $\gamma_{ijk} = \cos(q_{jm} + q_{kn} - q_{il})$ und $m + n - l = 0$. Diese Situation

liegt aber für die in Abb. 5-1 dargestellten spektralen Amplituden gerade vor, die Frequenzen von ψ_2 , ψ_4 und ψ_3 verhalten sich wie 1:3:4. Wie die Tabelle 4-1 in Kapitel 4 zeigt, ist $\langle \psi_2 \psi_3 \psi_4 \rangle$ ein nicht vernachlässigbares stationäres drittes Moment. Die gesuchte Parameterisierung folgt durch Eliminieren der Amplituden p_{i1} , usw. aus (5.4) mit Hilfe von (5.3). Ersetzen des Zeitmittelungsoperators durch den Ensemblemittelungsoperator liefert:

$$(5.5) \quad \langle X_i X_j X_k \rangle = \sqrt{\langle X_i X_i \rangle} \sqrt{\langle X_j X_j \rangle} \sqrt{\langle X_k X_k \rangle} \frac{\gamma_{ijk}}{\sqrt{2}}$$

Eine Parameterisierung dieser Art ist jedoch nur auf spektrale Amplituden anwendbar, für die $\overline{X_i} = 0$ gilt, also nicht für die Grundströmungsamplituden vom 1. Mode. Wie jedoch die Ergebnisse von Kapitel 4 zeigen, sind die dritten Momente, bei welchen ein 1. Mode der Grundströmung beteiligt ist alle vernachlässigbar klein und kommen somit für eine Parameterisierung nicht in Frage.

5.1.4. Bemerkungen zum Lösungsverfahren

Mit den Schließungsmethoden von Abschnitt 5.1.2. bildet (5.2a-e) das Gleichungssystem des stationären SD-Modells, jeweils ausgerichtet auf die HZ, RZ1 bzw. SV. Wie bereits erwähnt, bietet die Lösung für die HZ keine Schwierigkeiten, sie kann analytisch erfolgen. In den beiden übrigen Fällen jedoch ist das Gleichungssystem nichtlinear und kann nur mit iterativen Methoden gelöst werden.

Zur Lösung wird das Newtonsche Tangentennäherungsverfahren benutzt. Für den Fall einer Funktion $f(x)$ einer Variablen x hat es die Gestalt:

$$x^{k+1} = x^k - (f'(x^k))^{-1} f(x^k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Ausgehend von einer (bekannten) k -ten Näherung x^k an die Wurzel x^+ von $f(x)$ erhält man eine $(k+1)$ -te Näherung durch das Aufstellen der Tangente an $f(x)$ im Punkte $(x^k, f(x^k))$. Um Konvergenz des Verfahrens zu ermöglichen, darf die 0. Näherung x^0 nicht durch ein

Extremum von $f(x)$ von der Wurzel x^+ getrennt sein. Davon abgesehen besitzt das Verfahren die Eigenschaft der quadratischen Konvergenz (vergl.: ORTEGA und RHEINBOLD 1970, S 184). Eine Verallgemeinerung auf den Fall von N Gleichungen mit N Unbekannten kann leicht vollzogen werden.

5.2. Die Berechnung stationärer Zustände

Die Lösung des stationären SD-Modells wird für die Rossbyzirkulation im 1. Mode und die symmetrische Vacillation erörtert.

5.2.1. Rossbyzirkulation, $Ro_T^* = 0.015$

Das System (5.2a-e) wird nach 5.1.2.2. durch Vernachlässigen aller dritten Momente geschlossen. Wie der Vergleich mit dem in Kapitel 4 berechneten stationären Klima zeigt, brauchen von den 90 in (5.2a-e) insgesamt auftretenden Momenten nur 10 berücksichtigt zu werden. Das stationäre SD-Modell kann also durch Vernachlässigung von 80 Momenten und den ihnen zugeordneten Gleichungen vereinfacht werden.

Das Newtonsche Verfahren verlangt die Angabe einer 0. Näherung für die angestrebte Lösung. Als erster Versuch wurde ein Experiment mit der Anfangsnäherung Null für alle Variablen durchgeführt. Bei Vorgabe einer relativen Konvergenzschranke von 10^{-5} trat nach zwei Iterationen Konvergenz ein. Die dabei berechneten Werte für einen Teil der Variablen sind in Tab. 5-1, Spalte 2 angegeben. Wie der Vergleich mit den in Spalte 1 angegebenen stationären Statistiken zeigt, liefert das Modell für nicht vernachlässigbare zweite Momente den Wert Null. Der Wert für $\langle \psi_1 \rangle$ ist größer als der mit der Monte-Carlo-Vorhersage bestimmte Wert. Eine Analyse der Wirkungsweise des Newtonschen Verfahrens zeigt, daß die Anfangsnäherung Null dieselbe Wirkung hat, wie Vernachlässigen der zweiten Momente in (5.2a-e). Das Gleichungssystem wird dadurch auf die Gleichungen für die stationäre Hadleyzirkulation reduziert. Die Nachprüfung ergibt, daß der für $\langle \psi_1 \rangle$ berechnete Wert genau dem

	Monte-Carlo	SD-Modell	
		Experiment 1	Experiment 2
$\langle \psi_1 \rangle$	$2.7541 \cdot 10^{-2}$	2.8797	2.7532
$\langle \psi_3 \psi_3 \rangle$	$5.3887 \cdot 10^{-6}$	0.0	5.4150
$\langle \psi_5 \psi_5 \rangle$	5.3941 "	0.0	5.4150
$\langle \psi_5 \epsilon_3 \rangle$	0.4221 "	0.0	0.4273

Tab. 5-1: Vergleich zwischen stationären Statistiken (Monte-Carlo) und mit dem SD-Modell berechneten Momenten. Exp. 1: Anfangsnäherung 'Null'; Exp. 2: Anfangsnäherung 'Monte-Carlo'. $Ro_T^* = 0.015$. Erste Momente in $L^2 f_0$ -Einheiten, zweite Momente in $L^4 f_0^2$ -Einheiten.

Gleichgewichtswert für die stationäre Hadleyzirkulation entspricht. Die Anfangsnäherung Null für alle Variablen liegt somit im Sinne des Newtonschen Verfahrens ungünstig hinsichtlich der angestrebten, zur RZ1 gehörigen Lösung.

Als zweiter Versuch wurde ein Experiment durchgeführt, bei dem die mit der Monte-Carlo-Methode berechneten stationären Statistiken als Anfangsnäherung Verwendung fanden. Die Ergebnisse dieses Experiments sind in Spalte 3 von Tab. 5-1 wiedergegeben. Konvergenz trat hier bei derselben Konvergenzschranke wie bei Exp. 1 nach zwei Iterationen ein. Es zeigt sich eine gute Übereinstimmung (Abweichungen $< 0.5\%$) zwischen dem berechneten stationären Zustand und dem stationären Klima. Die bei den stationären Statistiken festgestellten Symmetriebeziehungen (z.B. $\langle \psi_3 \psi_3 \rangle = \langle \psi_5 \psi_5 \rangle$) sind bei den hier berechneten Momenten exakt erfüllt. Dies ist eine Eigenart des SD-Modelles aus welcher eine weitere Verringerung der Variablenzahl abgeleitet werden könnte. Davon wird jedoch hier kein Gebrauch gemacht.

Die Schließung des SD-Modelles durch Vernachlässigung der dritten Momente kann als exakt bezeichnet werden. Dies bedeutet aber, daß daß die hier berechneten Momente - bei Vernachlässigung numerischer

Fehler - als die Momente der mit dem (unendlichen) Klimaensemble verbundenen multivariaten Wahrscheinlichkeitsverteilung angesprochen werden können. Da keine dritten Momente auftreten ist diese aber eine multivariate Normalverteilung.

5.2.2. Symmetrische Vacillation, $Ro_T^* = 0.017$

In Abschnitt 5.1.2.3. wurde die Vermutung geäußert, daß eine Schließung durch Vernachlässigen der dritten Momente für den zur SV gehörigen stationären Zustand nicht zu einer Lösung führen kann. Dies ist genau dann der Fall, wenn gewisse, dort angesprochene Energietransformationen, die nur durch dritte Momente zustande kommen können, eine wesentliche Rolle spielen. Zur Untersuchung dieser Aussage werden deshalb zwei Experimente ausgeführt.

Von den in (5.2a-e) auftretenden ersten und zweiten Momenten finden nur diejenigen, zusammen mit den ihnen zugehörigen Gleichungen Berücksichtigung, für welche die vergleichbaren stationären Statistiken (bestimmt durch die Monte-Carlo-Vorhersage) nichtvernachlässigbare Werte besitzen. Man erhält somit 21 Gleichungen für zwei erste und 19 zweite Momente. In Exp. 1 wird die Schließung dieses Gleichungssystems durch Vernachlässigung der dritten Momente vollzogen, in Exp. 2 durch Parameterisierung der dritten Momente nach (5.5). Die hierzu erforderlichen Parameterisierungskoeffizienten γ_{ijk} werden aus den bekannten stationären Statistiken ($Ro_T^+ = 0.017$, Ensemblegröße = 60) berechnet. Letztere dienen auch bei beiden Experimenten als Anfangsnäherung.

Die Resultate beider Experimente sind in Tab. 5-2 dargestellt. Konvergenz trat in beiden Fällen bei der relativen Konvergenzschranke 10^{-5} nach zwei Iterationen ein. Es zeigt sich, daß Experiment 1 zur stationären Hadleyzelle führt. Die oben ausgesprochene Vermutung wird also bestätigt. Experiment 2 mit Schließung durch Parameterisierung der dritten Momente führt dagegen zu einem stationären Zustand, der gut (Abweichungen < 3%) mit dem in Spalte 1 angegebenen stationären Klima übereinstimmt. Die Abweichung

Monte-Carlo		SD-Modell	
		Experiment 1	Experiment 2
$\langle \psi_1 \rangle$	$3.0887 \cdot 10^{-2}$	3.2636	3.0892
$\langle \psi_2 \psi_2 \rangle$	$2.1682 \cdot 10^{-6}$	0.0	2.2115
$\langle \psi_3 \psi_3 \rangle$	3.6303 "	0.0	3.6983
$\langle \psi_4 \psi_4 \rangle$	3.6480 "	0.0	3.6879
$\langle \psi_5 \epsilon_3 \rangle$	0.5063 "	0.0	0.5167
$\langle \psi_6 \epsilon_4 \rangle$	0.0884 "	0.0	0.0909
$\langle \psi_2 \psi_3 \psi_4 \rangle$	$2.9265 \cdot 10^{-9}$	0.0	(3.0892)

Tab. 5-2: wie Tab. 5-1, jedoch $Ro_T^* = 0.017$.

Exp. 1: Schließung durch Vernachlässigen der dritten Momente.

Exp. 2: Schließung durch Parameterisierung der dritten Momente.

Drittes Moment in $L^6 f_0^3$ -Einheiten.

für das mit dem Parameterisierungsansatz (5.5) aus den Varianzen $\langle \psi_2 \psi_2 \rangle$, $\langle \psi_3 \psi_3 \rangle$ und $\langle \psi_4 \psi_4 \rangle$ berechneten dritten Momentes $\langle \psi_2 \psi_3 \psi_4 \rangle$ beträgt 5.5%. Im Gegensatz zur Rossbyzirkulation ist hier die Schließung mit einem Fehler behaftet, weshalb die hier berechneten Momente genauso wie die stationären Statistiken ebenfalls nur Approximationen an die Momente des zur symmetrischen Vacillation für $Ro_T^+ = 0.017$ gehörigen (unendlichen) Klimaensembles darstellen. Wie die Bedeutung der dritten Momente beweist, kann die zu ihm gehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung nicht mehr als multivariat-normal angesprochen werden.

Hinsichtlich der Schließung sei darauf hingewiesen, daß, wie die Arbeit von HOINKA (1975) zeigt, die Schließung durch Vernachlässigen der dritten Momente bei einem SD-Modell mit mehr Freiheitsgraden (und x-abhängigen Zwangsfunktionen) zumindest bei periodischen Zirkulationsformen möglich ist. Dabei wird jedoch in jedem Fall ein Fehler begangen, der vom Modell noch akzeptiert wird. Beim vorliegenden SD-Modell ist dies jedoch nicht mehr der Fall.

5.3. Die Simulation quasistationärer Klimaänderungen mit dem stationären SD-Modell

Wie in Abschnitt 1.5. erwähnt, kann eine quasistationäre Klimaänderung durch eine Folge stationärer Klimate simuliert werden. Insbesondere, wenn man nicht nur an der gesamten, durch die Änderung des äußeren Systems hervorgerufenen Klimaänderung, sondern auch am zeitlichen Verlauf des Klimas während dieser Änderung interessiert ist, sind zur Simulation eine Vielfalt von Monte-Carlo-Vorhersagen erforderlich.

Da jedoch, wie im vorhergehenden Abschnitt an zwei Fällen gezeigt, die mit dem SD-Modell berechneten stationären Zustände eine gute Übereinstimmung mit den entsprechenden stationären Klimaten aufweisen, kann diese Vielzahl von Monte-Carlo-Vorhersagen vermieden werden. Die quasistationäre Klimaänderung wird dann durch eine Folge von stationären Zuständen simuliert. Es wird angenommen, daß die für einen bestimmten Zustand des äußeren Systems errechnete Lösung des SD-Gleichungssystems als Anfangsnäherung für die Lösung bei einem anderen Zustand des Äußeren Systems dienen kann. Dies ist dann möglich, wenn die beiden Lösungen im Sinne des Newtonschen Verfahrens günstig zueinander liegen. Durch die Aneinanderfügung mehrerer solcher Schritte, können stationäre Zustände an verschiedenen Punkten des äußeren Systems berechnet werden. Das Verfahren ist allerdings nur dann brauchbar, wenn die einmal vorgenommene Schließung auch an den anderen Punkten des äußeren Systems ihre Gültigkeit behält, bzw. der durch die Schließung verursachte Fehler nicht zu stark ins Gewicht fällt. Das hier beschriebene Verfahren wird als Parametervariation bezeichnet.

Es scheint nicht erfolversprechend zu sein, eine Parametervariation über die Grenze zweier Zirkulationsformen (SV $\rightarrow$ RZ1) hinweg durchzuführen. Wir beschränken uns daher auf den Bereich der SV. Es wird diejenige quasistationäre Klimaänderung untersucht, die mit einer Erhöhung der aufgeprägten thermischen Rossbyzahl von 0.016 auf 0.018 verbunden ist. Dies entspricht einer Erhöhung des meridionalen Gradienten der Strahlungsgleichgewichtstemperatur

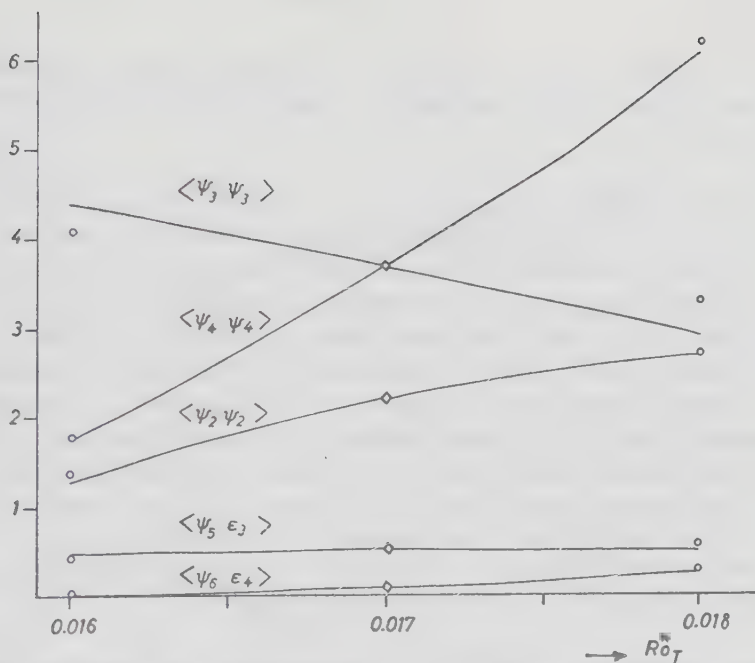


Abb. 5-2: Durch Parametervariation mit dem SD-Modell bestimmte Abhängigkeit stationärer zweiter Momente von Ro_T^* . Kreise und Rauten: Stationäre Statistiken nach der Monte-Carlo Methode. Die Schließung erfolgte bei $Ro_T^* = 0.017$. Ordinate in $10^{-6} L^4 f_0^2$ -Einheiten.

von 3.2 K/1000km auf 3.6 K/1000km, also um 12.5%. Die Parametervariation wird in zwei Teilen durchgeführt. Ausgehend von der bekannten Lösung für $Ro_T^* = 0.017$, wird Ro_T^* einmal in Schritten von 0.0002 auf 0.016 verringert, das zweitemal auf 0.018 erhöht. Die für $Ro_T^* = 0.017$ berechneten Parameterisierungskoeffizienten (siehe Abschnitt 5.2.2.) bleiben während des Experiments unverändert.

Die Ergebnisse dieses Experiments sind in Abb. 5-2 am Beispiel ausgewählter zweiter Momente dargestellt. Die dort eingezeichneten Kurven sind durch Interpolation aus den berechneten Stützstellen

konstruiert. Allgemein zeigt sich ein nahezu linearer Zusammenhang zwischen den dargestellten Momenten und der thermischen Rossbyzahl.

Zur Verifizierung sind an den Stellen $Ro_T^* = 0.016$, 0.017 und 0.018 die entsprechenden stationären Statistiken (Ensemblegröße = 60) eingezeichnet. Das stationäre Klima bei $Ro_T^* = 0.017$, das als Anfangsnäherung für die Lösung des SD-Modells an dieser Stelle Verwendung fand, ist durch Rauten besonders gekennzeichnet. Wie man erkennen kann, stimmen die durch Parametervariation berechneten stationären Zustände recht gut mit den stationären Klimaten überein. Allerdings deuten die an der Varianz $\langle \psi_3 \psi_3 \rangle$ erkennbaren systematischen Abweichungen darauf hin, daß die Parameterisierungskoeffizienten nicht im gesamten, hier betrachteten Variationsbereich gültig sind. Im Hinblick auf das Verhalten von $\langle \psi_3 \psi_3 \rangle$ kann eine Parametervariation nur in einem schmalen Bereich um die Stelle $Ro_T^* = 0.017$ durchgeführt werden.

Eine eingehendere Analyse und insbesondere eine Erklärung für das Verhalten von $\langle \psi_3 \psi_3 \rangle$ kann im Rahmen dieser Arbeit nicht gegeben werden. Vielmehr wird abschließend gezeigt, wie die so in Abhängigkeit vom äußeren System berechneten Momente zur Identifizierung einer mit zeitabhängigen Verfahren berechneten Klimaänderung als quasistationär dienen können. Dazu wäre eigentlich eine Monte-Carlo-Vorhersage mit zeitlich veränderlichem äußeren System erforderlich. Der damit verbundene Rechenaufwand würde jedoch die im Rahmen dieser Arbeit gegebene Rechenkapazität bei weitem übersteigen. Deshalb beschränke ich mich hier auf eine deterministische Vorhersage mit hinreichend großer Zeitskala für die Änderung des äußeren Systems. Bei einer Gesamtintegrationszeit von 2200 Tagen wird die thermische Rossbyzahl vom 200. bis zum 2200. linear von 0.016 auf 0.018 erhöht. Aus der daraus resultierenden Zeitreihe werden Momente als 100-Tagesmittel berechnet. Dabei wird angenommen, daß im Falle einer quasistationären Klimaänderung für die Rauschamplituden dieser Momente ein ähnliches Kriterium gelten muß wie (1.6).

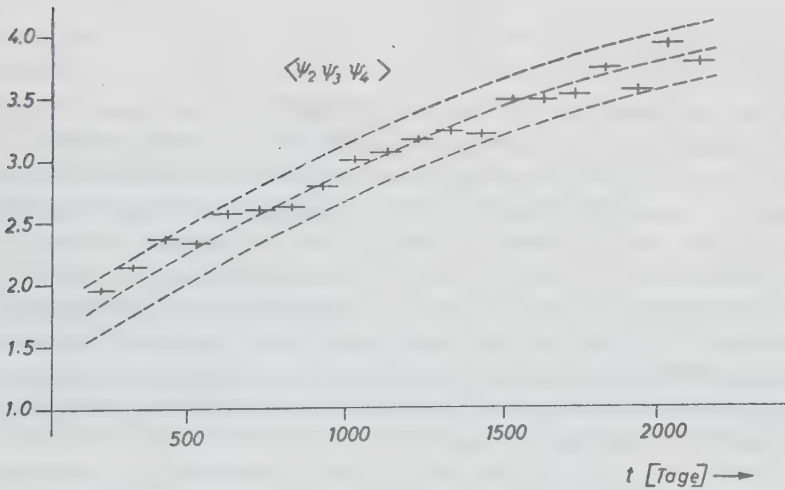
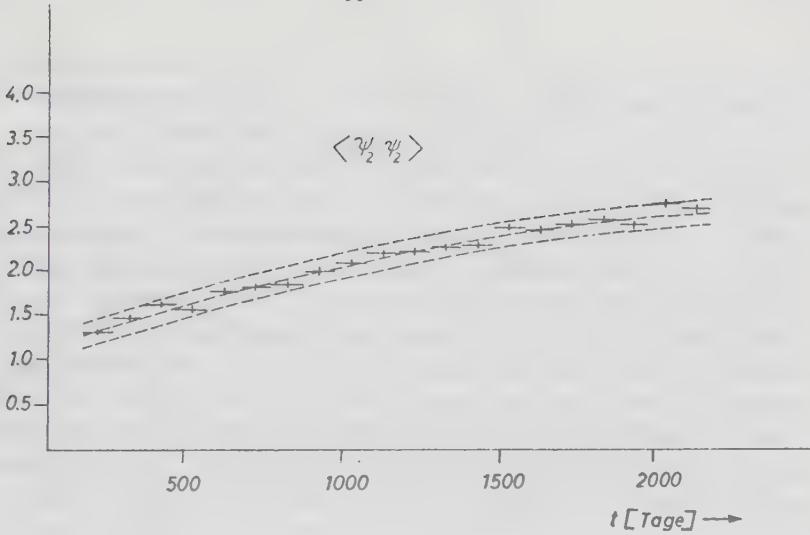


Abb. 5-3: Verlauf von 100-Tagesmitteln einer deterministischen Vorhersage mit linearer Erhöhung von Ro_T^* vom 200. bis zum 2200. Tag. Mittlere gestrichelte Kurven: Folge von stationären Momenten, bestimmt mit der Parametervariation. Ordinate oben in $10^{-6} L_f^2$ -Einheiten. Ordinate unten in $10^{-9} L_f^3$ -Einheiten.

Die Abbildung 5-3 zeigt den Verlauf der aufeinanderfolgenden 100-Tagesmittel $\overline{\psi_2^* \psi_2^*}$ und $\overline{\psi_2^* \psi_3^* \psi_4^*}$ für den Zeitraum, in welchem die Klimaänderung stattfindet. Die mittleren Kurven stellen dabei den Verlauf der entsprechenden stationären Momente als Resultate der Parametervariation mit dem SD-Modell dar, im Falle des dritten Moments bestimmt mit dem Parameterisierungsansatz (5.5). Die beiden äußeren Kurven sind die Rauschgrenzen der 100-Tagesmittel innerhalb des betrachteten Zeitintervalls. Wie man sieht, lassen sich für die Rauschamplituden sinnvolle Schranken angeben, es kann also angenommen werden, daß es sich hier um eine quasistationäre Klimaänderung handelt. Zugleich zeigt sich, daß diese quasistationäre Klimaänderung, zumindest was die dargestellten Momente betrifft, durch die mit der Parametervariation berechnete Folge stationärer Zustände simuliert werden kann.

5.4. Zusammenfassung

Von den insgesamt fünf Zirkulationsformen des spektralen Zirkulationsmodells wurde für drei (HZ, RZ1 und SV) die Berechnung von Klimaapproximationen mit dem stationären SD-Modell durchgeführt. Die Schließung wurde für die HZ durch Vernachlässigen der zweiten und dritten Momente, für die RZ1 durch Vernachlässigen der dritten Momente und für die SV durch Parameterisierung der dritten Momente vollzogen. Da die Anfangsnäherung Null für alle Variablen in jedem Fall zu einer stationären Hadleyzelle führte, wurden für RZ1 und SV als Anfangsnäherung mit Monte-Carlo-Vorhersagen bestimmte stationäre Statistiken benutzt. Hiermit glückte die Lösung in beiden Fällen.

Der hier vorgestellte Versuch der Simulation einer quasistationären Klimaänderung mit dem SD-Modell war nur als Test für die prinzipielle Durchführbarkeit dieser Methode gedacht. Wenn man berücksichtigt, daß bei auf die Atmosphäre bezogenen Untersuchungen so drastische Änderungen des äußeren Systems, wie sie hier vorgenommen wurden, nicht in Frage kommen, kann dieser Test als geglückt bezeichnet werden.

6. Schlußbemerkung

Zusammenfassend wird festgestellt, daß die Klimasimulation mit dem stationären, spektralen SD-Modell bei den in dieser Arbeit betrachteten Zirkulationsformen - Rossbyzirkulation im 1. Mode und symmetrische Vacillation - als geglückt bezeichnet werden kann. Nun kann allerdings die Frage auftauchen, warum bei einer so einfachen - weil periodischen - Zirkulationsform überhaupt ein so aufwendiges Instrumentarium zur Klimabestimmung aufgestellt wurde. Hierzu ist zu bemerken, daß diese Arbeit lediglich ein erster Schritt bei der Anwendung der durch LEITH (1975) auf der Klimakonferenz in Stockholm vorgeschlagenen Definition der Klimastatistiken durch Ensemblemittel auf Modelle sein kann. Da dem Autor aus der Literatur keinerlei derartige Untersuchungen über die Verwendung von 1) Monte-Carlo-Vorhersagen und 2) spektralen SD-Modellen bekannt waren: mit Ausnahme von HOINKA (1975), wurde für einen ersten Versuch ein Zirkulationsmodell mit möglichst wenig Freiheitsgraden verwandt. Das gewählte Modell besitzt jedoch keine irreguläre, nichtperiodische Zirkulationsform, bei welcher die Klimabestimmung über eine Berechnung von Ensemblemitteln eigentlich erst ihren vollen Sinn gewinnt.

Eine weitere Folge der geringen Anzahl der Freiheitsgrade ist die Tatsache, daß sich zur Schließung des SD-Modelles, angewandt auf die symmetrische Vacillation eine Parameterisierung der dritten Momente als unumgänglich erwies. Es kann jedoch vermutet werden, daß bei SD-Modellen mit mehr Freiheitsgraden die Frage der dritten Momente nicht ausschlaggebend ist. Eine wesentlich entscheidende Einschränkung liegt darin, daß vorläufig die oberste Grenze bezüglich der Anzahl der Freiheitsgrade für SD-Modelle der hier vorgestellten Art bei drei Wellenzahlen und zwei Modes zu liegen scheint. Eine Ausdehnung der hier vorgeschlagenen Methode auf Modelle die eine bessere Repräsentation der Atmosphäre darstellen (z.B. im Sinne von LEITH vereinfachte AAZ-Modelle) ist ohne zusätzliche Annahmen gegenwärtig kaum denkbar.

Literaturverzeichnis

- Charney, J. 1959: On the general circulation of the atmosphere.
In: The atmosphere and sea in motion, New York,
178 - 193.
- Davies, D. J. & D. R. Davies 1969: Some numerical experiments
using a two-level general circulation model.
Q. J. Roy. Met. Soc. 95, 148 - 162.
- Dolzhanskiy, F. V. 1969: Calculating the zonal atmospheric
circulation. Izv. Atm. Okean. Fiz. 5, 659 - 671.
- Egger, J. 1975: A statistical-dynamical model of the zonally
averaged steady-state of the general circulation
of the atmosphere. Tellus 27, 325 - 350.
- Eliassen, E. & B. Machenhauer 1965: A study of the fluctuations
of the atmospheric planetary flow patterns repre-
sented by spherical harmonics. Tellus 17, 220 - 238.
- Epstein, E. S. 1969: Stochastic dynamic prediction.
Tellus 21, 739 - 759.
- Fleming, R. J. 1971: On stochastic dynamic prediction. I. The
energetics of uncertainty an the question of
closure. Mon. Weath. Rev. 99, 851 - 872.
- Fultz, D. R.R. Long, G. V. Owens, W. Bohan, R. Kaylor & J. Weil
1959: Studies of thermal convection in a rotating
cylinder with some implications for large-scale
atmospheric motions. Met. Monographs 4, No. 21.
- GARP 1975: The physical basis of climate and climate modelling.
Report on the international study conference in
Stockholm, 29 July - 10 August 1974.
GARP Publication Series No. 16.
- Hide, R. 1953: Some experiments on thermal convection in a rota-
ting liquid. Q. J. Roy. Met. Soc. 79, 161 -
- Hoinka, K.-P. 1975: Ein spektrales Modell zur Bestimmung von sta-
tionären Zuständen orographisch beeinflusster plane-
tarischer Zirkulationssysteme. Dissertation,
Ludwig-Maximilians Universität München.

- Kasahara, A. & W. M. Washington 1967: NCAR global general circulation model of the atmosphere. *Mon. Weath. Rev.* 95, 389 - 402.
- 1971: General circulation experiments with a six-layer NCAR model, including orography, cloudiness and surface temperature calculations. *J. Atm. Sci.* 28, 657 - 701.
- Kim, J.W. 1973: The influence of large-scale topography on thermally forced planetary circulations. Dissertation, University of California, Los Angeles.
- Kurihara, Y. 1970: A statistical dynamical model of the general circulation of the atmosphere. *J. Atm. Sci.* 27, 847 - 870.
- Landsberg, H. 1958: Physical climatology. DuBois, Pennsylvania.
- Leith, C. E. 1975: The design of a statistical-dynamical climate model and statistical constraints on the predictability of climate. In: *GARP (1975)*, 137 - 141.
- Lorenz, E. N. 1960: Maximum simplification of the dynamic equations. *Tellus* 12, 243 - 254.
- 1962: Simplified dynamic equations applied to the rotating-basin experiment. *J. Atm. Sci.* 19, 39 - 51.
- 1963a: Deterministic nonperiodic flow. *J. Atm. Sci.* 20, 130 - 141.
- 1963b: The mechanics of vacillations. *J. Atm. Sci.* 20, 448 - 464.
- 1964: The problem of deducing the climate from the governing equations. *Tellus* 16, 1 - 23.
- Mintz, Y. 1965: Very long-term global integration of the primitive equations of atmospheric motion. WMO-IUGG symposium on research and development aspects of long-range forecasting. WMO Tech. Note No. 66, 141 - 155.
- Monin, A. S. & A. M. Yaglom 1971: Statistical fluid mechanics: Mechanics of turbulence. Cambridge, Massachusetts & London.

- Newton, C. W. 1971: Global angular momentum balance: Earth torques and atmospheric fluxes. *J. Atm. Sci.* 28, 1329 - 1341.
- Phillips, N. A. 1956: The general circulation of the atmosphere. A numerical experiment. *Q. J. Roy. Met. Soc.* 82, 123 - 164.
- Ortega, J. M. & W. C. Rheinboldt 1970: Iterative solutions of nonlinear equations in several variables. New York & London.
- Quinet, A. 1973a: The structure of nonlinear processes. *Tellus* 15, 536 - 544.
- 1973b: Nonlinear mechanisms in a non-conservative quasigeostrophic flow which possesses 30 degrees of freedom. *Tellus* 15, 545 - 559.
- 1974: A numerical study of vacillation. *Adv. in Geophys.* 17, 101 - 186.
- Robert, A. J. 1966: The integration of a low order spectral form of the primitive meteorological equations. *J. Met. Soc. Japan* 44, 237ff.
- Rossby, C. G. 1939: Relation between variations in the intensity of the zonal circulation of the atmosphere and the displacement of semipermanent centers of action. *J. Mar. Res.* 2, 38ff.
- Saltzman, B. & A. D. Vernekar 1971: An equilibrium solution for the axially-symmetric component of the earth's macro-climate. *J. Geophys. Res.* 76, 1498 - 1524.
- Sela, J. & Wiin-Nielsen, A. 1971: Simulation of the atmospheric annual energy cycle. *Mon. Weath. Rev.* 99, 460 - 468.
- Smagorinsky, J. 1963: General circulation experiments with the primitive equations. I. The basic experiment. *Mon. Weath. Rev.* 91, 99 - 164.
- , S. Manabe & J. L. Holloway 1965: Numerical results from a nine-level general circulation model of the atmosphere. *Mon. Weath. Rev.* 93, 727 - 768.

- Williams, G. P. & D. R. Davies 1965: A mean motion model of the general circulation. Q. J. Roy. Met. Soc. 91, 471 - 489.
- Willson, M. A. G. 1973: Statistical-dynamical modelling of the atmosphere. Commonwealth Meteorology Research Centre, Int. Sci. Rep. , Melbourne.
- Zurmühl, R. 1961: Matrizen und ihre technischen Anwendungen. Berlin, Göttingen & Heidelberg.

Anhang 1: Berechnung der Stabilitätsgrenzen der stationären Hadleyzirkulation

Unter Verwendung der Störungsmethode bestimmt LORENZ (1962) die Stabilität der HZ gegenüber kleinen x -abhängigen Störungen. Wegen der strukturellen Ähnlichkeit zwischen den Gleichungen (2.12a,b) und den LORENZschen Modellgleichungen kann das Verfahren von LORENZ auf das vorliegende einfache Zirkulationsmodell übertragen werden, wenn die Unterschiede (vergl. Abschnitt 2.4.) zwischen beiden Modellen beachtet werden.

Für die Variablen der HZ gelten die Gleichungen (3.2a,b), wobei der Einfachheit halber zwischen den äußeren Parametern K_1, H , und K ein festes Verhältnis angenommen wird:

$$2K_1 = \alpha_1 K, \quad H = \alpha_2 K.$$

Ferner wird zunächst der Einfluß des β -Parameters unterdrückt, indem in (2.12a,b) $B = 0$ gesetzt wird. Die zeitlich konstanten Grundströmungsamplituden ψ_1 und ϵ_1 sind damit durch folgende Gleichungen gegeben:

$$(A1.1a) \quad \psi_1 = 2 \epsilon_1$$

$$(A1.1b) \quad \epsilon_1 = RO_T^* / (1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \sigma_0)$$

In diese HZ werden x -abhängige Störungen eingelagert, die so klein sein sollen, daß (A1.1a,b) ihre Gültigkeit behalten. Einsetzen von $\psi_1 = 2\epsilon_1 = \text{const.}$ in (2.12a,b) liefert ein lineares, gewöhnliches DGL-System für die spektralen Störungsamplituden $\psi_i, \epsilon_i, i = 3, \dots, 6$. Wegen $\psi_2 = \epsilon_2 = 0$ für die HZ besteht dieses DGL-System aus zwei entkoppelten Untersystemen für die Störungen vom Typ $(1,n)$, bzw. $(2,n)$. Das Verhalten dieser beiden Störungstypen kann also getrennt betrachtet werden.

Das DGL-System für die Störungsamplituden vom 1. Mode - $\psi_3, \epsilon_3, \psi_5, \epsilon_5$ - nimmt mit den Abkürzungen:

$$S = a_3^2 \sigma_0 = a_5^2 \sigma_0$$

$$A = (a_5^2 - a_1^2) / a_3^2 = (a_3^2 - a_1^2) / a_5^2$$

$$C = c_{315} = -c_{513}$$

folgende Gestalt an:

$$(A1.2) \quad \dot{\underline{X}} = f_0 / (1+S) \underline{M} \underline{X}$$

Dabei sind

$$\underline{X} = \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \varepsilon_3 \\ \psi_5 \\ \varepsilon_5 \end{pmatrix}$$

der Spaltenvektor der Störungsamplituden, $\dot{\underline{X}} = \frac{d}{dt} \underline{X}$,

$$\underline{M} = \begin{pmatrix} -(1+S)K & 2(1+S)K & -(1+S)C\psi_1 & -(1+S)C\varepsilon_1 \\ SK & -(S(\alpha_1+2)+\alpha_2)K & -(AS-1)C\varepsilon_1 & -(AS+1)C\psi_1 \\ (1+S)C\psi_1 & (1+S)C\varepsilon_1 & -(1+S)K & 2(1+S)K \\ (AS-1)C\varepsilon_1 & (AS+1)C\psi_1 & SK & -(S(\alpha_1+2)+\alpha_2)K \end{pmatrix}$$

die Koeffizientenmatrix des Systems. Nach Elimination von ψ_1 mit Hilfe von (A1.1a) wird das Verhalten der Störungen in Abhängigkeit von K und ε_1 , d.h. von Reibung und vertikaler Windscherung diskutiert.

Die Lösung von (A1.2) führt auf das Eigenwertproblem der Koeffizientenmatrix:

$$(A1.3) \quad \det(\underline{M} - \lambda \underline{E}) = 0.$$

Jeder einfachen Wurzel λ_i der charakteristischen Gleichung (A1.3) entspricht ein System partikulärer Lösungen $\psi_3 = C_1 e^{\lambda_i t}$, $\varepsilon_3 = C_2 e^{\lambda_i t}$, usw., $i = 1, \dots, 4$. Komplexe Eigenwerte mit $\text{Re}(\lambda_i) < 0$ führen zu einer exponentiellen Abnahme der Störungsamplituden, solche mit $\text{Re}(\lambda_i) > 0$ zu einem exponentiellen Anwachsen. Der Grenzfall sind sich neutral verhaltende Störungsamplituden (d.h. ψ_3, ε_3 , usw. sind z.B. Sinusfunktionen der Zeit) mit rein imaginären Eigenwerten. Die charakteristische Gleichung (A1.3) ist vierten Grades, es existieren also vier Eigenwerte. Wegen der speziellen Gestalt der Koeffizientenmatrix $\underline{M}$

sind ihre Eigenwerte gleich den Eigenwerten von $\underline{M}_1 + i \underline{M}_2$ und den dazu komplex konjugierten Eigenwerten von $\underline{M}_1 - i \underline{M}_2$, wobei $\underline{M}_1$ und $\underline{M}_2$ zweireihige quadratische Matrizen, gebildet aus den Elementen von $\underline{M}$ in der linken oberen, bzw. unteren Ecke sind. Da die Spur von $\underline{M}$ ($\text{Sp}(\underline{M})$) gleich der Summe der Eigenwerte ist (vergl. z.B. ZURMÜHL 1961), müssen wegen $\text{Sp}(\underline{M}) < 0$ wenigstens ein Paar konjugiert komplexe Eigenwerte negative Realteile haben. Aus der charakteristischen Gleichung $\underline{M}_1 + i \underline{M}_2$ folgt dann, daß die beiden restlichen Eigenwerte unter dieser Voraussetzung genau dann rein imaginär sind, wenn gilt:

$$(A1.4) \quad \epsilon_1 - \sqrt{(g(\sigma_0)/f(\sigma_0))} K = 0.$$

Hierin bedeuten

$$\begin{aligned} f(\sigma_0) &= C^2 A^2 (9S^2 (1-1/A) - 3S(5-4/A) + 5/A + 2S'(2S-3S^2-2+3/A) + \\ &\quad + S'^2 (1/A - S)), \\ g(\sigma_0) &= 18S^3 + 12S^2 + 2S + S'(21S^2 + 10S + 1) + S'^2 (8S+2) + S'^3, \\ S' &= \alpha_1 S + \alpha_2. \end{aligned}$$

Wie man zeigen kann haben die Eigenwerte von $\underline{M}_1 + i \underline{M}_2$ beide negative Realteile, wenn die linke Seite von (A1.4) negativ ist, während ein Realteil positiv ist, wenn die linke Seite von (A1.4) positiv ist. Im ersten Fall erweist sich die HZ als stabil gegenüber den eingelagerten Störungen, im zweiten Fall wird durch die barokline Instabilität der Störungen die HZ zerstört, sie ist instabil gegenüber den eingepflanzten Störungen.

(A1.4) definiert also eine Grenzkurve für die Stabilität der HZ in der (K, ϵ_1) -Ebene. Aufgrund der Definition in Kapitel 2. ist K ein Mitglied des äußeren Systems, ϵ_1 ist dagegen dem inneren System zugeordnet. Eine Abhängigkeit der Stabilitätsgrenzkurve allein vom äußeren System erhält man durch Elimination von ϵ_1 in (A1.4) mit Hilfe von (A1.1b), die ja weiterhin gültig bleibt.

$$(A1.5) \quad \text{Ro}_T^* - (1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \sigma_0) \sqrt{g(\sigma_0)/f(\sigma_0)} K = 0.$$

In Anlehnung an LORENZ werden die Grenzkurven in der (K^{-1}, Ro_T^*) -Ebenenschar des äußeren Phasenraums dargestellt. Für gegebenes $\sigma_0, \alpha_1, \alpha_2$, sowie Wellenzahl und Mode der Störungen definiert

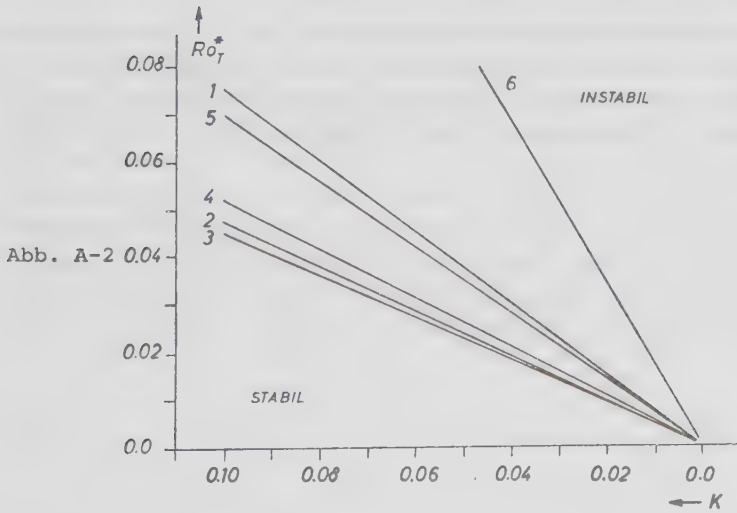
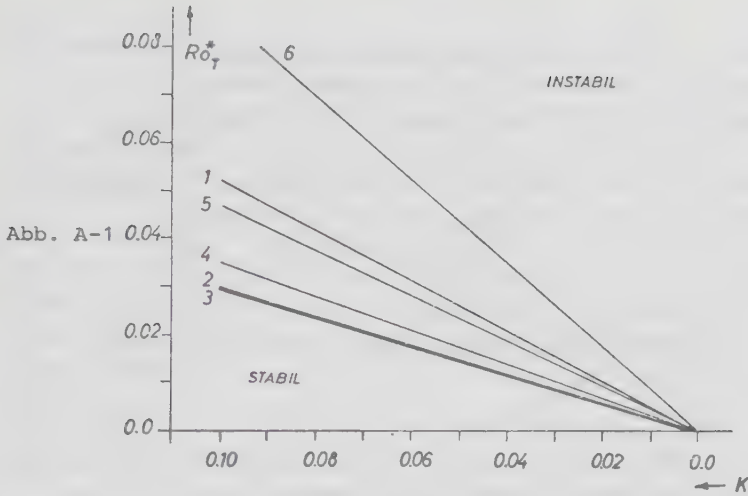


Abb. A-1, A-2: Stabilitätsgrenzkurven der HZ in der (K^{-1}, Ro_T^+) -Ebene für den Fall $\beta = 0$.
 A-1: Störungswellen im 1. Mode (1,n)
 A-2: Störungswellen im 2. Mode (2,n)

(A1.5) eine Gerade in der entsprechenden Ebene. In den Abbildungen A-1 und A-2 sind die Grenzkurven jeweils für die Wellenzahl 1 bis 6 für den 1. bzw. 2. Mode dargestellt.

Bei Berücksichtigung des bisher vernachlässigten β -Effektes ergibt sich folgende Bedingung für die Grenzkurven:

$$(A1.6) \quad f(\sigma_0) \epsilon_1^2 + f^+(\sigma_0) \epsilon_1 - g(\sigma_0) K^2 - g^+(\sigma_0) = 0,$$

wobei

$$f^+(\sigma_0) = CA\beta^+ \{ 3S^2 - 11S + 2(3S+1)/A + S'(3S-4+2/A) \}$$

$$g^+(\sigma_0) = \beta^{+2} (2S+S')$$

$$\beta^+ = B \, b_{53}/a_3^2$$

Die Transformation von (A1.6) in die (K^{-1}, RO_T^*) -Ebene wird analog zur Transformation von (A1.4) vorgenommen. (A1.6) ist die Gleichung einer Hyperbel, wobei für große ϵ_1 und K der erste und dritte Term auf der linken Seite von (A1.6) dominierend sind, (A1.6) reduziert sich dann auf (A1.4). Dargestellt und diskutiert sind die Stabilitätsgrenzkurven mit Berücksichtigung des β -Effektes in Kapitel 3 (Abb. 3-1a,b).

Anhang 2: Das zeitliche Differenzenschema

Die Gleichungen des Zirkulationsmodells (2.12a,b) bilden ein System von gewöhnlichen DGLen des Typs:

$$(A2.1) \quad \frac{d}{dt} X_i = G_i(\underline{X}), \quad i = 1, 2, \dots, N$$

Zur Durchführung einer deterministischen Vorhersage muß - wie in Abschnitt 1.2. dargestellt - die Zeitkoordinate auf einem Gitter $(0, 1, 2, \dots, P)$ mit dem Gitterabstand Δt diskretisiert werden. Dabei wird (A2.1) durch folgende Differenzenformel approximiert:

$$(A2.2a) \quad X_i^{*(v+1)} = X_i^{(v-1)} + 2 \Delta t G_i(\underline{X}^{(v)})$$

$$(A2.2b) \quad X_i^{(v)} = X_i^{*(v)} + \alpha (X_i^{*(v+1)} - 2 X_i^{*(v)} + X_i^{(v-1)}).$$

(A2.2a,b) werden von ROBERT (1966) und SCHMIDT (1971) angegeben und diskutiert. (A2.2a) entspricht dem Leapfrog-Schema, welches jedoch bei nichtkonservativen Gleichungen vor allem wegen der vertikalen Diffusionsterme zu numerischer Instabilität führt. Deshalb wird zu jedem Integrationszeitpunkt $v\Delta t$ mit (A2.2b) auf die vorläufige Zeitreihe $X_i^{*(v+1)}, X_i^{(v)}, X_i^{(v+1)}$ ein Filter angewandt. Für den Glättungsfaktor $\alpha (0 \leq \alpha \leq 1)$ wird der von ROBERT angegebene Wert 0.01 benutzt. Eine Ausnahme bilden lediglich Versuche mit hoher thermischer Rossbyzahl (RZ2) wo der Wert 0.1 Verwendung fand. (A2.2a,b) besitzt den Leapfrog-Vorteil, daß $G_i(\underline{X})$ für jeden Zeitschritt nur einmal berechnet werden muß.

Anhang 3: Koeffizienten der algebraischen Darstellungen horizontaler Differentiationen

Die in (2.10a-c) auftretenden Koeffizienten a_i^2 , b_{ij} und c_{ijk} besitzen folgende Werte:

$$a_1^2 = 1$$

$$a_2^2 = 4$$

$$a_3^2 = a_5^2 = n^2 + 1$$

$$a_4^2 = a_6^2 = n^2 + 4$$

$$b_{ij} = 0, \text{ für alle } i, j \text{ bis auf:}$$

$$b_{35} = -b_{53} = b_{46} = -b_{64} = n.$$

$$c_{ijk} = 0, \text{ für alle } i, j, k \text{ bis auf:}$$

$$\frac{c_{135}}{5} = \frac{c_{146}}{4} = \frac{c_{236}}{8} = \frac{c_{245}}{8} = -n \frac{8\sqrt{2}}{15\pi}$$

und daraus abgeleitete Permutationen. Hierbei gilt die Regel:

$$c_{ijk} = c_{jki} = c_{kij} = -c_{ikj} = -c_{jik} = -c_{kji}.$$

In allen Formeln steht n für die bei der horizontalen Diskretisierung auszuwählende x_0 -Wellenzahl.

Lebenslauf

Am 24. 1. 1945 wurde ich, Werner Metz, als Sohn des kaufmännischen Angestellten Johann Metz und seiner Ehefrau Christine in Henfenfeld/Mfr. geboren. Von 1951 bis 1956 besuchte ich die Volksschule in Nürnberg, Kyllburg/Eifel und Hersbruck/Mfr.. Danach trat ich in die Oberrealschule Hersbruck ein und legte dort 1964 die Reifeprüfung ab. Im selben Jahr begann ich das Studium der Meteorologie an der Ludwig-Maximilians Universität München. Dieses endete 1970 mit der Diplomprüfung an der Universität München. Bis Mitte 1971 war ich als wissenschaftlicher Angestellter am Institut für Meteorologie der Forstlichen Forschungsanstalt in München beschäftigt. Seither bin ich Verwalter einer wissenschaftlichen Assistentenstelle am Institut für Theoretische Meteorologie der Universität München.

